به نام خدا

---

۱) جواب عمومی معادلات مرتبه اول زیر را بدست آورید:

۱. $2yy' + x = xe^{-y^2}$

۲. $ydx + (xy + x - e^{-y})dy = 0$

۳. $x(y + x)y' = 2x + y + 1$

۴. $y' = 2\frac{y}{x} + x\tan(\frac{y}{x^2})$

۵. $y' = \pi^2 + xe^y, \quad y(0) = 4\ln\pi$

۶. $(x^2 y\ln y + xy^2 - y\sin x)dx + (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + y^2\cos y)dy = 0$

۷. $y(2y + 4x^2)dx + x(4y + 3x^2)dy = 0; \quad (\mu = x^\alpha y^\beta)$

۸. $xy' = 2x^2 y'\ln(y) - y$

۲) جواب عمومی معادلات مرتبه دوم زیر را بدست آورید:

۱. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3,\ x > 0$

۲. $y'' - 2y' + y = e^x\ln(x)$

۳. $x^2 y'' - xy' + y = x(\ln x)^{91}$

۴. $xy'' + (x - 1)y' - y = x^2 e^{-x}$

۳) به کمک روش ضرایب نامعین فرم کلی یک جواب خاص از معادلات زیر را بیابید:

۱. $y'' + 2y' + 2y = \sinh x\cos x + e^x\sin^2 x + 1$

۲. $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x} + \cos(3x)\sinh(x)$

۳. $2y'' - 7y' + 3y = xe^{3x}\cos^2 x\sin^2 x$

۴. $y'' + 4y' + 20y = x^3 e^x + e^{-2x}\cos(x)\sin(2x)\sin(x)$

۴) به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + y' + y = e^{-x} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

۵) الف) تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \ln \frac{s^۲ + ۱}{s(s+۱)}$ را بدست آورید.

ب) فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $[۰, +\infty)$ پیوسته و از رتبه‌ی نمایی بوده و $f'(x)$، $g'(x)$ و $g''(x)$ در $[۰, +\infty)$ پیوسته‌ی قطعه‌ای باشند. همچنین فرض کنید تبدیل لاپلاس $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب برابر $F(s)$ و $G(s)$ بوده و $f(۰) = ۱$، $g(۰) = ۳$ و $g'(۰) = ۸$. مطلوبست محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس تابع زیر بر حسب توابع $F(s)$ و $G(s)$.

$$h(x) = xe^{۹x}(f'(x) + g''(x)).$$

٦) به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + y = e^x(u_۱(x) - u_۲(x)) \quad y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۱.$$

۷) برای تابع $f(t) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq t < ۱ \\ -۱ & ۱ \leq t < ۲ \end{cases}$ با شرط $f(t+۲) = f(t)$ نشان دهید که

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{۱}{s} \tanh(\frac{s}{۲}).$$

۸) تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \int_۰^x e^{۲x} e^{-t} \cos^۲(۲t)\, dt, \qquad g(x) = x\, u_{\frac{\pi}{۴}}(x) \sin(x).$$

۹) نشان دهید تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \frac{e^{-ax}\cos(bx) - e^{-px}\cos(qx)}{x}$ برابر با $F(s) = \frac{۱}{۲} \ln \frac{(s+p)^۲ + q^۲}{(s+a)^۲ + b^۲}$ می‌باشد.

۱۰) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله‌ی زیر را حل کنید

$$y'' - ۲y' + y = xe^x \sin x, \quad y(۰) = y'(۰) = ۰.$$

۱۱) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلات زیر را حل کنید:

$$(i)\ y'' + ۲y' + ۲y = \begin{cases} x & ۰ \leq x < ۱ \\ ۱ & x \geq ۱ \end{cases} \quad y(۰) = y'(۰) = ۰ \quad (ii)\ f'(x) = x + \int_۰^x f(x-u)\cos(u)\, du,\ f(۰) = ۱.$$

۱۲) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$y'' + y = t(۱ - U_\pi(t)), \quad y(۰) = y'(۰) = ۰.$$

۱۳) لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(1+e^{-\frac{\pi}{2}S})}{S^2-2S+5}\right]$$

۱۴) لاپلاس وارون زیر را بیابید

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln(1-2s^{-2})\right]$$

۱۵) تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را بیابید هرگاه

$$f(x)=\int_0^{2x} e^{2(x-u)}\sin u\,du.$$

۱٦) ثابت کنید که تساوی زیر برقرار است:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{S}(S-1)}\right]=\frac{2e^x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,du$$

۱۷) جواب معادله دیفرانسیل $y''-y=f(x)$ را با شراط اولیه $y(0)=y'(0)=0$ بدست آورید که در آن

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\leq x\leq \pi\\ 0 & \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}\qquad f(x+2\pi)=f(x).$$

۱۸) با استفاده از روش مقدار ویژه—بردار ویژه جواب عمومی دستگاه ناهمگن زیر را بیابید

$$X'=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}e^t\\ e^{2t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}.$$

۱۹) با استفاده از روش تغییر پارامتر جواب عمومی دستگاه خطی زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y+z+t\\ \frac{dy}{dt}=x+z+e^{-t}\\ \frac{dz}{dt}=x+y\end{cases}$$

۲۰) دستگاه ناهمگن زیر را حل کنید.

$$X'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}X+t\,e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}.$$

۲۱) با استفاده از روش سریهای توانی، جواب عمومی معادله‌ی زیر را به صورت سری توانی حول $x_{0} = 1$ نمایش دهید.

$$x^{2}y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

۲۲) یک جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریهای توانی حول $x_{0} = 2$ بدست آورید.

$$x^{2}y'' + (x - 2x^{2})y' + (x^{2} - x - 1)y = 0$$