

(۱) کلیه جواب‌های معادله زیر را بیابید: (۲۵ نمره)

$$z^5 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \right)^{1393}.$$

حل: داریم

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \right)^{1393} = (i)^{1393} = (i)(i)^{1392} = (i)(i^2)^{696} = (i)(-1)^{696} = i = 1e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}; k \in \mathbb{Z}.$$

حال با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ در معادله بالا، می‌یابیم که

$$r^5 e^{i5\theta} = 1e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \implies r^5 = 1, \quad 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

بنابراین با در نظر گرفتن $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ، پنج جواب معادله فوق عبارتند از

$$k = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{10} \implies z = re^{i\theta} = 1e^{i\frac{\pi}{10}} = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{10}\right),$$

$$k = 1 \implies \theta = \frac{3\pi}{10} \implies z = re^{i\theta} = 1e^{i\frac{3\pi}{10}} = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = i,$$

$$k = 2 \implies \theta = \frac{5\pi}{10} \implies z = re^{i\theta} = 1e^{i\frac{5\pi}{10}} = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{10}\right),$$

$$k = 3 \implies \theta = \frac{7\pi}{10} \implies z = re^{i\theta} = 1e^{i\frac{7\pi}{10}} = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right),$$

$$k = 4 \implies \theta = \frac{9\pi}{10} \implies z = re^{i\theta} = 1e^{i\frac{9\pi}{10}} = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right).$$

(۲) اگر

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\text{Log}(z-z^2)}{z-i} dz = a + ib,$$

آنگاه با استدلال کامل و ذکر دلایل کافی a و b را بیابید. (در اینجا $a, b \in \mathbb{R}$ اعداد حقیقی و تابع لگاریتم با شاخه اصلی است.) (۲۵ نمره)

حل: اول روشن است که $z = i$ ، ریشه مخرج، یک نقطه غیرتحلیلی است که درون منحنی بسته $|z-i| = \frac{1}{2}$ قرار دارد. اکنون نقاط غیرتحلیلی تابع $\text{Log}(z-z^2)$ را به طریق زیر مشخص می‌کنیم:

$$\text{Im}(z-z^2) = \text{Im}(z) - \text{Im}(z^2) = y - 2xy = y(1-2x) = 0 \implies y = 0 \text{ یا } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{Re}(z-z^2) = \text{Re}(z) - \text{Re}(z^2) = x - (x^2 - y^2) \leq 0 \implies y^2 \leq x^2 - x.$$

$$y = 0 \implies x - x^2 \leq 0 \implies x(1-x) \leq 0 \implies x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty);$$

$$x = \frac{1}{2} \implies y^2 \leq -\frac{1}{4} < 0, \text{ که این غیرممکن است.}$$

مشاهده می شود که هیچکدام از این نقاط درون منحنی بسته $|z - i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ قرار ندارند و ما می توانیم به راحتی فرمول انتگرال کوشی را بکار ببریم و نتیجه بگیریم که

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\text{Log}(z - z^2)}{z - i} dz = (2\pi i) \text{Log}(i - i^2) = (2\pi i) \text{Log}(i + 1) = (2\pi i) \text{Log}(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})$$

$$= (2\pi i) (\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi^2}{2} + i(2\pi \ln \sqrt{2}).$$

در نتیجه، $b = 2\pi \ln \sqrt{2}$ و $a = -\frac{\pi^2}{2}$.

(۳) سری لوران تابع

$$f(z) = \frac{z}{2z + 1}$$

را در ناحیه $|z - 1| > 2$ بدست آورید. (۲۵ نمره)

حل: ابتدا قرار می دهیم $w = z - 1$ و با در نظر گرفتن $\frac{3}{2} > 2 > |w|$ ، تابع f را بر حسب توان های w به روش زیر بسط می دهیم:

$$f(z) = \frac{1+w}{2w+3} = \frac{1+w}{2w} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2w}} = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2w}\right)^n; \quad \left|\frac{3}{2w}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2w)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^{n+1}w^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{(2w)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^{n+1}w^n}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^{n+1}} w^{-n}; \quad |w| > \frac{3}{2}.$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^{n+1}} (z-1)^{-n}; \quad |z-1| > 2 > \frac{3}{2}.$$

(۴) در مورد کراندارگی یا بی کرانگی تابع $f(z) = \sin z$ در صفحه اعداد مختلط (C) به طور کامل بحث کنید. (۲۵ نمره)

حل: این تابع کلا در صفحه ی مختلط بیکران است، زیرا

$$|\sin(iy)| = |i \sinh(y)| = |\sinh(y)| \rightarrow +\infty, \quad \text{as } |y| \rightarrow \infty.$$

راه حل دوم:

$$|\sin z|^2 = |\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \geq \sinh^2 y \rightarrow \infty, \quad \text{as } y \rightarrow \infty.$$

راه حل سوم: بنابر قضیه لیوویل، هر تابع تام و کراندار تابعی ثابت است. لذا اگر $\sin z$ که یک تابع تام است کراندار هم باشد، آنگاه با توجه به قضیه لیوویل یک تابع ثابت خواهد بود، اما این غیر ممکن است زیرا $\sin 0 = 0$ و $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. این تناقض نشان می دهد که $\sin z$ در \mathbb{C} کراندار نیست.

موفق باشید
