۱) الف: سری فوریه تابع $f(x) = \sin^۲ x + ۲\cos^۲ x$، $-\pi \leq x \leq \pi$، را بدست آورید. (۱۰ نمره)
ب: برای سری فوریه تابع $f(x)$، درستی اتحاد پارسوال را تحقیق کنید. (۱۰ نمره)
جواب: می‌توان نوشت

$$f(x) = ۱ + \cos^۲ x = ۱ + \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} = \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos(۲x) = \text{سری فوریه اف}.$$
$$\Longrightarrow ||f||^۲ = (\frac{۳}{۲})^۲||۱||^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲||\cos(۲x)||^۲ = \frac{۹}{۴}(۲\pi) + \frac{۱}{۴}(\pi) = \frac{۱۹\pi}{۴}.$$

از طرف دیگر، یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$||f||^۲ = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^۲dx = ۲\int_{۰}^{\pi}(\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos(۲x))^۲dx = \frac{۱۹\pi}{۴}. \quad \square$$

---

۲) الف: نشان دهید جواب عمومی معادله موج داده شده،

$$a^۲u_{xx} = u_{tt},\ -\infty < x < +\infty,\ t > ۰,$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت (۱۵ نمره):

$$u(x,t) = \Phi(x - at) + \Psi(x + at).$$

ب: با استفاده از قسمت الف، جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید (۱۰ نمره):

$$u_{xx} = u_{tt} + ۱,\ -\infty < x < +\infty,\ t > ۰.$$

جواب: با استفاده از تغییر متغیر دالامبر $(\xi,\eta) = (x + at, x - at)$ معادله‌ی موج $a^۲u_{xx} = u_{tt}$ به معادله‌ی $u_{\xi\eta} = ۰$ تبدیل می‌شود که جواب عمومی آن با دو بار انتگرال گیری به شکل $u(\xi,\eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta)$ نوشته می‌شود. جزئیات کامل آن در کتاب بیان شده است. پس قسمت اول اثبات شد. برای قسمت دوم، اول یک جواب مستقل از زمان (به عنوان یک جواب خاص که لزوما یکتا نیست) برای معادله می‌یابیم، یعنی، قرار می‌دهیم $u(x,t) = U(x)$. بنابراین داریم

$$U''(x) = ۱ \Longrightarrow U(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ + c_۱x + c_۲.$$

در نتیجه، جواب عمومی معادله‌ی داده شده در قسمت (ب) به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \Phi(x+t)+\Psi(x-t)+\frac{۱}{۲}x^۲+c_۱x+c_۲ = \Phi(x+t)+\Psi(x-t)+\frac{۱}{۲}x^۲ = \Phi(x+t)+\Psi(x-t)+\frac{۱}{۴}(x^۲-t^۲).$$

توجه کنید که در تساوی‌های بالا از اتحاد $x = \frac{(x-t)+(x+t)}{۲}$ استفاده شده است و Φ, Ψ نیز توابع دلخواهی هستند. علاوه بر این، می‌توانید ملاحظه کنید که تحت تغییر متغیر $(\xi,\eta) = (x + at, x - at)$ معادله‌ی موج ناهمگن $a^۲u_{xx} = u_{tt} + ۱$ به معادله‌ی $u_{\xi\eta} = \frac{۱}{۴a^۲}$ تبدیل می‌شود که جواب عمومی آن به صورت $u(\xi,\eta) = \frac{۱}{۴a^۲}\xi\eta + \Phi(\xi) + \Psi(\eta)$ بدست می آید. $\square$

---

۳) مساله‌ی زیر را حل کنید (۳۰ نمره):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x + t, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = t, & t \ge 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos(2\pi x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

جواب: ابتدا تابع کمکی $W(x,t)$ را به گونه‌ای می‌یابیم که صرفا در شرایط مرزی مساله صدق کند، یعنی $W_x(0,t) = W_x(1,t) = t$. انتخاب‌های متعددی وجود دارد که ساده‌ترین و در عین حال بهترین آنها $W(x,t) = tx$ می‌باشد. حال تغییر متغیر $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$ را در نظر می‌گیریم که منجر می‌شود به

$$\begin{cases} V_t = V_{xx} + t, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ V_x(0,t) = V_x(1,t) = 0 \\ V(x,0) = 1 + \cos(2\pi x) \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی، در مساله‌ی فوق قرار می‌دهیم $V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\cos(n\pi x)$ و ضرایب مجهول $V_n(t)$ را می‌یابیم. بنابراین،

$$V_t - V_{xx} - t = 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} V_n'(t)\cos(n\pi x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n\pi)^2 V_n(t)\cos(n\pi x) - t = 0 \Longrightarrow$$

$$(V_0'(t) - t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(V_n'(t) + (n\pi)^2 V_n(t)\Big)\cos(n\pi x) = 0$$

$$\Longrightarrow V_0'(t) - t = 0,\ V_n'(t) + (n\pi)^2 V_n(t) = 0; n = 1, 2, \ldots.$$

$$V(x,0) = 1 + \cos(2\pi x) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} V_n(0)\cos(n\pi x) = 1 + \cos(2\pi x) \Longrightarrow V_0(0) = 1, V_2(0) = 1.$$

و از اینرو، داریم

$$V_0'(t) = t,\ V_0(0) = 1 \Longrightarrow V_0(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2,$$

$$V_2'(t) = -(2\pi)^2 V_2(t),\ V_2(0) = 1 \Longrightarrow V_2(t) = e^{-4\pi^2 t},$$

$$V_n'(t) = -(n\pi)^2 V_n(t),\ V_n(0) = 0 \Longrightarrow V_n(t) = 0 \quad for \quad n \neq 0, 2.$$

در نتیجه،

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\cos(n\pi x) = V_0(t) + V_2(t)\cos(2\pi x) = (1 + \frac{1}{2}t^2) + e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x). \quad \square$$

---

۴) معادله لاپلاس با شرایط داده شده را حل کنید (۲۵ نمره):

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & 1 < r < e,\ 0 < \theta < \frac{1}{4} \\ u(1,\theta) = 0, \\ u(e,\theta) = 0, \\ u(r,0) = 0, \\ u(r,\frac{1}{4}) = \sqrt{2}\sin(\pi \ln r). \end{cases}$$

جواب: از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم، یعنی اول کلیه‌ی جواب‌های معادله به شکل

$u(r,\theta)=R(r).\Phi(\theta)$ را می‌یابیم.

$$u(1,\theta)=u(e,\theta)=0 \Longrightarrow R(1).\Phi(\theta)=R(e).\Phi(\theta)=0 \Longrightarrow R(1)=R(e)=0.$$
$$u(r,0)=0 \Longrightarrow R(r).\Phi(0)=0 \Longrightarrow \Phi(0)=0.$$
$$r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0 \Longrightarrow r^2R''(r)\Phi(\theta)+rR'(r)\Phi(\theta)+R(r)\Phi''(\theta)=0$$
$$\Longrightarrow \frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\sigma=\text{عدد ثابت}.$$

بنابراین، دو معادله دیفرانسیل به شرح ذیل بدست می‌آوریم:

$$\left\{r^2R''(r)+rR'(r)+\sigma R(r)=0,\ R(1)=R(e)=0\right\}\quad and\quad \{\Phi''(\theta)+\sigma\Phi(\theta)=0,\ \Phi(0)=0\}.$$

اولی معادله‌ی اویلر است که جواب ان به شکل r^m است که m در چندجمله‌ای مشخصه $m^2+\sigma=0$ صدق می‌کند. لذا سه حالت متمایز زیر را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$(i)\quad \sigma=0 \Longrightarrow R(r)=c_1+c_2\ln r,\ R(1)=R(e)=0 \Longrightarrow c_1=c_1+c_2=0 \Longrightarrow R(r)=0.$$
$$(ii)\quad \sigma=-k^2<0 \Longrightarrow m=\pm k \Longrightarrow R(r)=c_1r^k+c_2r^{-k},\ R(1)=R(e)=0 \Longrightarrow$$
$$c_1+c_2=c_1e^k+c_2e^{-k}=0 \Longrightarrow c_1=c_2=0 \Longrightarrow R(r)=0.$$
$$(iii)\quad \sigma=k^2>0 \Longrightarrow m=\pm\sqrt{-1}k \Longrightarrow R(r)=c_1\cos(k\ln r)+c_2\sin(k\ln r),\ R(1)=R(e)=0 \Longrightarrow$$
$$c_1=c_1\cos(k)+c_2\sin(k)=0 \Longrightarrow c_1=0,\ \sin(k)=0 \Longrightarrow k=n\pi \Longrightarrow \sigma=k^2=(n\pi)^2.$$

حال معادله‌ی دوم را با فرض $\sigma=(n\pi)^2$ حل می‌کنیم. داریم

$$\Phi''(\theta)+(n\pi)^2\Phi(\theta)=0 \Longrightarrow \Phi(\theta)=a_n\cos(n\pi\theta)+b_n\sin(n\pi\theta).$$
$$\Phi(0)=0 \Longrightarrow a_n=0 \Longrightarrow \Phi_n(\theta)=b_n\sin(n\pi\theta).$$

پس $u_n(r,\theta)=R_n(r)\Phi_n(\theta)=b_n\sin(n\pi\theta)\sin(n\pi\ln r)$، و در نتیجه

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi\theta)\sin(n\pi\ln r).$$

در آخر، با اعمال شرط اولیه $u(r,\frac{1}{4})=\sqrt{2}\sin(\pi\ln r)$، ضرایب مجهول b_n را می‌یابیم. داریم

$$\sqrt{2}\sin(\pi\ln r)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\frac{\pi}{4})\sin(n\pi\ln r) \Longrightarrow b_1\sin(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2} \Longrightarrow b_1=2, b_2=b_3=\cdots=0.$$

بنابراین، $u(r,\theta)=2\sin(\pi\theta)\sin(\pi\ln r)$. $\square$

موفق باشید