به نام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان — دانشکده علوم ریاضی

۱۳۹۴/۱۰/۱۳ امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی وقت: ۹۰ دقیقه

---

۱) کلیه جواب‌های معادله زیر را بیابید: (۲۵ نمره)

$$z^{5}=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right)^{1393}.$$

حل: داریم

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right)^{1393}=(i)^{1393}=(i)(i)^{1392}=(i)(i^{2})^{696}=(i)(-1)^{696}=i=1e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)};\ k\in\mathbb{Z}.$$

حال با قرار دادن $z=re^{i\theta}$ در معادله بالا، می‌یابیم که

$$r^{5}e^{i5\theta}=1e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\Longrightarrow r^{5}=1,\ 5\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Longrightarrow r=1,\ \theta=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}.$$

بنابراین با در نظر گرفتن $k=0,1,2,3,4$، پنج جواب معادله فوق عبارتند از

$$\begin{aligned}
k=0 &\implies \theta=\frac{\pi}{10}\Longrightarrow z=re^{i\theta}=1e^{i\frac{\pi}{10}}=\cos(\frac{\pi}{10})+i\sin(\frac{\pi}{10}),\\
k=1 &\implies \theta=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow z=re^{i\theta}=1e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})=i,\\
k=2 &\implies \theta=\frac{9\pi}{10}\Longrightarrow z=re^{i\theta}=1e^{i\frac{9\pi}{10}}=\cos(\frac{9\pi}{10})+i\sin(\frac{9\pi}{10}),\\
k=3 &\implies \theta=\frac{13\pi}{10}\Longrightarrow z=re^{i\theta}=1e^{i\frac{13\pi}{10}}=\cos(\frac{13\pi}{10})+i\sin(\frac{13\pi}{10}),\\
k=4 &\implies \theta=\frac{17\pi}{10}\Longrightarrow z=re^{i\theta}=1e^{i\frac{17\pi}{10}}=\cos(\frac{17\pi}{10})+i\sin(\frac{17\pi}{10}).
\end{aligned}$$

---

۲) اگر

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{Log(z-z^{2})}{z-i}dz=a+ib,$$

آنگاه با استدلال کامل و ذکر دلایل کافی a و b را بیابید. (در اینجا $a,b\in\mathbb{R}$ اعداد حقیقی و تابع لگاریتم با شاخه اصلی است.) (۲۵ نمره)

حل: اول روشن است که $z=i$، ریشه مخرج، یک نقطه غیرتحلیلی است که درون منحنی بسته $|z-i|=\frac{1}{2}$ قرار دارد. اکنون نقاط غیر تحلیلی تابع $Log(z-z^{2})$ را به طریق زیر مشخص می‌کنیم:

$$Im(z-z^{2})=Im(z)-Im(z^{2})=y-2xy=y(1-2x)=0\Longrightarrow y=0\ \text{یا}\ x=\frac{1}{2},$$

$$Re(z-z^{2})=Re(z)-Re(z^{2})=x-(x^{2}-y^{2})\leq0\Longrightarrow y^{2}\leq x^{2}-x.$$

$$y=0\Longrightarrow x-x^{2}\leq0\Longrightarrow x(1-x)\leq0\Longrightarrow x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty);$$

$$x=\frac{1}{2}\Longrightarrow y^{2}\leq-\frac{1}{4}<0,$$ که این غیرممکن است.

مشاهده می‌شود که هیچکدام از این نقاط درون منحنی بسته $|z-i|=\frac{1}{2}$ قرار ندارند و ما می‌توانیم به راحتی فرمول انتگرال کوشی را بکار بریم و نتیجه بگیریم که

$$\begin{aligned}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{Log(z-z^2)}{z-i}dz &= (2\pi i)Log(i-i^2)=(2\pi i)Log(i+1)=(2\pi i)Log(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})\\ &= (2\pi i)(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})=-\frac{\pi^2}{2}+i(2\pi\ln\sqrt{2}).\end{aligned}$$

در نتیجه، $a=-\frac{\pi^2}{2}$ و $b=2\pi\ln\sqrt{2}$.

---

۳) سری لوران تابع

$$f(z)=\frac{z}{2z+1}$$

را در ناحیه $|z-1|>2$ بدست آورید. (۲۵ نمره)

حل: ابتدا قرار می‌دهیم $w=z-1$ و با در نظر گرفتن $|w|>2>\frac{3}{2}$، تابع f را بر حسب توان‌های w به روش زیر بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1+w}{2w+3}=\frac{1+w}{2w}.\frac{1}{1+\frac{3}{2w}}=(\frac{1}{2w}+\frac{1}{2})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{3}{2w})^n;\quad |\frac{3}{2w}|<1\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2w)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2^{n+1}w^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{(2w)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2^{n+1}w^n}\\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^{n-1}}{2^{n+1}}w^{-n};\quad |w|>\frac{3}{2}.\\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^{n-1}}{2^{n+1}}(z-1)^{-n};\quad |z-1|>2>\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

---

۴) در مورد کرانداری یا بی‌کرانی تابع $f(z)=\sin z$ در صفحه اعداد مختلط $(\mathbb{C})$ به طور کامل بحث کنید. (۲۵ نمره)

حل: این تابع کلا در صفحه‌ی مختلط بیکران است، زیرا

$$|sin(iy)|=|i\sinh(y)|=|\sinh(y)|\longrightarrow+\infty,\quad as\quad |y|\longrightarrow\infty.$$

راه حل دوم:

$$|\sin z|=|\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y|=\sin^2 x+\sinh^2 y\geq\sinh^2 y\longrightarrow\infty,\quad as\quad y\longrightarrow\infty.$$

راه حل سوم: بنابر قضیه لیوویل، هر تابع تام و کراندار تابعی ثابت است. لذا اگر $\sin z$ که یک تابع تام است کراندار هم باشد، آنگاه با توجه به قضیه لیوویل یک تابع ثابت خواهد بود، اما این غیر ممکن است زیرا $\sin 0=0$ و $\sin\frac{\pi}{2}=1$. این تناقض نشان می‌دهد که $\sin z$ در $\mathbb{C}$ کراندار نیست.

موفق باشید