

به نام خدا
 دانشگاه صنعتی اصفهان - دانشکده علوم ریاضی
 میان ترم ریاضی مهندسی ۱۳۹۴/۸/۲۸
 وقت: ۱۰۵ دقیقه بارم هر سوال: ۲۵ نمره

(۱) اگر $u(r, \theta)$ جوابی کراندار برای مساله زیر باشد

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & r > 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \\ u(r, 0) = 0, \\ u(r, \frac{\pi}{4}) = 0, \\ u(1, \theta) = \sin(2\theta) - 3 \sin(4\theta), \end{cases}$$

آنگاه $u(r, \theta)$ را بیابید.

(۲) اگر f تابع متناوب با دوره تناوب 2π داده شده با

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

باشد آنگاه سری فوریه تابع $f(x)$ را بیابید و به کمک آن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ را بیابید.

(۳) اگر $u = u(x, t)$ در معادله زیر با شرایط داده شده صدق کند

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = e^{-x} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

آنگاه $u(1, 1)$ را بیابید.

(۴) معادله زیر با شرایط داده شده را حل کنید

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x + t \cos x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = t, \\ u_x(\pi, t) = t, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

موفق باشید