به نام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان – دانشکده علوم ریاضی

میان ترم ریاضی مهندسی ۱۳۹۴/۸/۲۸

وقت: ۱۰۵ دقیقه بارم هر سوال: ۲۵ نمره

---

۱) اگر $u(r,\theta)$ جوابی کراندار برای مساله زیر باشد

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, \quad r > 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u(r,0) = 0, \\ u(r,\frac{\pi}{2}) = 0, \\ u(1,\theta) = \sin(2\theta) - 3\sin(4\theta), \end{cases}$$

آنگاه $u(r,\theta)$ را بیابید.

حل:

$$u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta)$$

$$u(r,0) = 0 \Longrightarrow R(r)\varphi(0) = 0 \Longrightarrow \varphi(0) = 0,$$

$$u(r,\pi/2) = 0 \Longrightarrow R(r)\varphi(\pi/2) = 0 \Longrightarrow \varphi(\pi/2) = 0.$$

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \Longrightarrow \frac{r^2 R''(r)\varphi(\theta) + rR'(r)\varphi(\theta) + R(r)\varphi''(\theta)}{R(r)\varphi(\theta)} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} = \sigma$$

$$\Longrightarrow (ODE_1):\ \varphi''(\theta) + \sigma\varphi(\theta) = 0,\ \ \varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0,$$

$$(ODE_2):\ r^2 R''(r) + rR'(r) - \sigma R(r) = 0,\ r > 1,\ \ r \to \infty \text{ کراندار وقتی } R(r).$$

$$(ODE_1) \Longrightarrow \sigma_n = (\frac{n\pi}{\pi/2})^2 = (2n)^2,\ \ \varphi_n(\theta) = \sin(2n\theta),\ n \geq 1.$$

$$(ODE_2) \Longrightarrow r^2 R''(r) + rR'(r) - (2n)^2 R(r) = 0,\ \text{کراندار } R(r),\ as\ r \to \infty.$$

$$\Longrightarrow R_n(r) = A_n r^{2n} + B_n r^{-2n} = B_n r^{-2n},\ (A_n = 0 \text{ چون})$$

$$\Longrightarrow R_n(r) = B_n r^{-2n},\ \forall\ n \in \mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

$$\text{جواب عمومی}:\ u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\varphi_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\theta) = B_n r^{-2n}\sin(2n\theta).$$

$$\text{اعمال شر اولیه}:\ u(1,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2n\theta) = \sin(2\theta) - 3\sin(4\theta)$$

$$\Longrightarrow B_1 = 1, B_2 = -3, B_3 = B_4 = \cdots = 0.$$

$$\Longrightarrow u(r,\theta) = B_1 r^{-2}\sin(2\theta) + B_2 r^{-4}\sin(4\theta) = r^{-2}\sin(2\theta) - 3r^{-4}\sin(4\theta).\quad \square$$

۲) اگر f تابع متناوب با دوره تناوب 2π داده شده با

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x),$$

باشد آنگاه سری فوریه تابع $f(x)$ را بیابید و به کمک آن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ را بیابید.

حل: داریم

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(nx) dx = 0. \\
&\Longrightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}.1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)\cos(nx).
\end{aligned}$$

حال از تساوی پارسوال نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
&||f||^2 = (\frac{\pi}{2})^2||1||^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)^2 ||\cos(nx)||^2 \Longrightarrow \\
&\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{4}(2\pi) + \sum_{n=1,\ n\ odd}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{4}{n^4}\right)(\pi) \Longrightarrow \\
&\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\sum_{n\ :\ odd} \frac{1}{n^4} \Longrightarrow \frac{\pi^3}{6} = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1,\ n\ odd}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\
&\Longrightarrow \sum_{n\geq 1\ \text{فرد}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \qquad \square
\end{aligned}$$

---

۳) اگر $u = u(x,t)$ در معادله زیر با شرایط داده شده صدق کند

$$\begin{cases}
u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t \geq 0 \\
u(0,t) = 0 \\
u(x,0) = e^{-x} \\
u_t(x,0) = 0
\end{cases}$$

آنگاه $u(1,1)$ را بیابید.

حل: چون در حضور یک معادله موج همگن هستیم که در آن دامنه تغییرات x نامحدود است، لذا استفاده

از روش دالامبر برای حل این مساله ضروری، الزامی و اجباری است. با توجه به اطلاعات مساله داریم

$$u_{tt} = ۹u_{xx} \Longrightarrow a^۲ = ۹ \Longrightarrow a = ۳.$$

جواب عمومی : $u(x,t) = \phi(x+at) + \psi(x-at) = \phi(x+۳t) + \psi(x-۳t).$

$$u(۱,۱) = \phi(۴) + \psi(-۲) = \phi(۴) - \phi(۲) = \frac{۱}{۲}e^{-۴} - \frac{۱}{۲}e^{-۲} = \frac{۱}{۲}(e^{-۴} - e^{-۲}).$$

$$u(\circ, t) = \circ \Longrightarrow \phi(۳t) + \psi(-۳t) = \circ,\ \forall\, t > \circ$$

$$\Longrightarrow \psi(X) = -\phi(-X),\ \forall\, X < \circ \Longrightarrow \psi(-۲) = -\phi(۲).$$

$$u(x,\circ) = e^{-x} \Longrightarrow \phi(x) + \psi(x) = e^{-x}, x > \circ. \qquad (i)$$

$$u_t(x,\circ) = \circ \Longrightarrow ۳\phi'(x) - ۳\psi'(x) = \circ \Longrightarrow \phi'(x) - \psi'(x) = \circ \Longrightarrow (\phi(x) - \psi(x))' = \circ$$

$$\Longrightarrow \phi(x) - \psi(x) = ۲k,\ x > \circ. \qquad (ii)$$

$$(i),(ii) \Longrightarrow \phi(x) = k + \frac{۱}{۲}e^{-x},\ \ \psi(x) = -k + \frac{۱}{۲}e^{-x};\ \ x > \circ.$$

$$\Longrightarrow \phi(۴) - \phi(۲) = k + \frac{۱}{۲}e^{-۴} - k - \frac{۱}{۲}e^{-۲} = \frac{۱}{۲}e^{-۴} - \frac{۱}{۲}e^{-۲}.$$

$$\Longrightarrow u(۱,۱) = \frac{۱}{۲}(e^{-۴} - e^{-۲}). \qquad \square$$

---

۴) معادله زیر با شرایط داده شده را حل کنید

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x + t\cos x, & \circ < x < \pi, \quad t > \circ, \\ u_x(\circ, t) = t, \\ u_x(\pi, t) = t, \\ u(x,\circ) = \circ. \end{cases}$$

حل: قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t);\ \ v_x(x,t) = Ax + B = A(t)x + B(t):\ v_x(\circ,t) = t,\ v_x(\pi,t) = t.$$

$$\Longrightarrow B = t, A\pi + B = t \Longrightarrow A = \circ, B = t.$$

$$\Longrightarrow v_x(x,t) = t \Longrightarrow v(x,t) = xt \Longrightarrow u(x,t) = xt + w(x,t).$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = t\cos x, \ \ \circ < x < \pi,\ \ t > \circ \\ w_x(\circ,t) = w_x(\pi,t) = \circ \\ w(x,\circ) = \circ. \end{cases}$$

توابع ویژه مساله‌ی اشتورم لیوویل : $\Phi_n(x) = \cos(nx),\ n = \circ, ۱, ۲, ۳, \cdots$

$$w(x,t) = \sum_{n=\circ}^{\infty} w_n(t)\Phi_n(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} w_n(t)\cos(nx)$$

$$w(x,\circ) = \sum_{n=\circ}^{\infty} w_n(\circ)\cos(nx) = \circ \Longrightarrow w_n(\circ) = \circ, n = \circ, ۱, ۲, ۳, \cdots$$

$$w_t - w_{xx} = t\cos x \Longrightarrow \sum_{n=\circ}^{\infty} w_n'(t)\cos(nx) + \sum_{n=\circ}^{\infty} n^۲ w_n(t)\cos(nx) = t\cos x$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[w_n'(t)+n^2 w_n(t)]\cos(nx) = t\cos x \Longrightarrow \begin{cases} w_n'(t)+n^2 w_n(t)=0, & n\neq 1 \\ w_1'(t)+w_1(t)=t, & n=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow w_n(t)\equiv 0,\ \forall\, n\neq 1,\quad w_1(t)=e^{-t}w_1(0)+\int_0^t e^{-(t-s)}s\,ds = t-1+e^{-t}.$$

$$\Longrightarrow w(x,t)=w_1(t)\cos x=(t-1+e^{-t})\cos x$$

$$\Longrightarrow u(x,t)=xt+w(x,t)=xt+(t-1+e^{-t})\cos x. \quad \square$$

موفق باشید