بسمه تعالی

محتوای آموزشی درس دستگاه‌های دینامیکی ۱ قسمت اول

سر فصل درس: مقدمات و اهداف درس، مفاهیم و تعاریف اصلی در دستگاههای دینامیکی، نگاشت پوانکاره برای معادلات اسکالر و مشتقات آن، دستگاههای خطی در $\mathbb{R}^n$، روش قطری کردن، نمای یک عملگر، قضیه اساسی وجود و یکتایی برای دستگاههای خطی، دسته بندی نمای فاز دستگاههای خطی در $\mathbb{R}^2$، مقادیر ویژه حقیقی و مختلط، فرم های متعارف جردن، اندیس های کمبود، دستگاههای خطی غیر همگن، قضیه لیوویل و نتایج حاصل از آن، نظریه موضعی دستگاههای غیر خطی، قضیه اساسی وجود و یکتایی، قضیه منیفلد پایدار، انتگرال اول و دستگاههای حافظ انرژی، نمای فاز دستگاههای نیوتنی، توابع لیاپانوف، قضیه پایداری لیاپانوف، قضیه ناپایداری لیاپانوف.

۱ مقدمه و اهداف درس

معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t; \mu), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p, \tag{1}$$

$$x \mapsto g(x; \mu) \ \text{ یا } \ x_{n+1} = g(x_n; \mu), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

که در آن V یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^p$ و U یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ است. در این معادلات، μ به عنوان پارامتر، x به عنوان متغیر حالت (وابسته) و t به عنوان متغیر زمان (مستقل) در نظر گرفته می‌شوند. هدف از این درس، مطالعه معادلات دیفرانسیل یا میدان‌های برداری به فرم (۱) و معادلات تفاضلی یا نگاشت‌هایی به فرم (۲) است.

در این دوره تحصیلی، همه تمرکز روی سیستم (۱) است.

تعریف. تابع $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ که در معادله (۱) صدق می‌کند، جوابی از (۱) نامیده می‌شود. این جواب یک منحنی در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند که توسط $t \in I$ پارامتری شده و بردار مماس در هر نقطه از این منحنی توسط (۱) داده می‌شود.

تعریف. فضای متغیرهای حالت (۱)، یعنی $\mathbb{R}^n$، فضای فاز (۱) نامیده می‌شود و هدف اصلی در دستگاه‌های دینامیکی، تعیین هندسه (رفتار کیفی و مجانبی) منحنی‌های جواب معادله (۱) در فضای فاز می‌باشد.

تعریف. اگر در معادله (۱) تابع f به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد و تنها تابعی از $(x; \mu)$ باشد، یعنی $\dot{x} = f(x; \mu)$، آنگاه معادله را **خودگردان** می‌نامیم.

بررسی معادلات غیرخودگردان دشوار است.

برای مشخص کردن یک منحنی جواب در فضای فاز که از نقطه خاصی می‌گذرد از نماد $x(t, t_0, x_0)$ استفاده می‌شود. لذا، جواب خاص $x(t)$ از معادله (۱) که در شرط اولیه $x(t_0) = x_0$ صدق می‌کند با $x(t, t_0, x_0)$ نمایش داده می‌شود. در حالت $t_0 = 0$، بویژه در معادلات خودگردان، از نماد $x(t, x_0)$ استفاده می‌شود. همچنین، برای نشان دادن وابستگی جواب‌ها به پارامتر، از نماد $x(t, t_0, x_0; \mu)$ استفاده می‌شود.

تعریف. نمودار تابع $x(t, t_0, x_0)$ برحسب t یک **منحنی انتگرال** از (۱) نامیده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid x = x(t, t_0, x_0), \quad t \in I\},$$

که در آن I بازه زمانی وجود جواب است که شامل t_0 است.

تعریف. برای $x_0 \in U$، **مدار** x_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$O(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x(t, t_0, x_0), \ \ t \in I\}.$$

تعریف. اگر نگاشت $g(x;\mu)$ در معادله (۲) به عنوان تابعی از x برای μ ثابت وارون پذیر باشد، آنگاه یک دنباله دو طرفه از نقاط به صورت

$$\{\cdots, g^{-n}(x_0;\mu), \ldots, g^{-1}(x_0;\mu), x_0, g(x_0;\mu), \ldots, g^{n}(x_0;\mu), \cdots\}$$

مدار نقطه x_0 تحت نگاشت (۲) نامیده می‌شود، که در آن $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ و g^n به صورت استقرایی در زیر تعریف می‌شود:

$$g^{n}(x_0;\mu) = g(g^{n-1}(x_0;\mu);\mu), \ \ n \geq 2, \qquad g^{-n}(x_0;\mu) = g^{-1}(g^{-n+1}(x_0;\mu);\mu), \ \ n \geq 2.$$

در صورتی که $g(x;\mu)$ به عنوان تابعی از x برای μ ثابت وارون پذیر نباشد، آنگاه دنباله‌های یکطرفه از نقاط به فرم

$$\{x_0, g(x_0;\mu), g^{2}(x_0;\mu), \ldots, g^{n}(x_0;\mu), \ldots\}$$

مدارهای (۲) نامیده می‌شوند.

مثال. معادله اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$x' = \frac{dx}{dt} = ax, \ \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \tag{۳}$$

ثابت a در معادله بالا را می‌توان به عنوان یک پارامتر در نظر گرفت. با تغییر a معادله و همچنین جواب‌ها تغییر می‌کنند. جواب ثابت $x(t) = 0$ یک **جواب تعادلی یا نقطه تعادل** از معادله نامیده می‌شود. اگر $a > 0$ تمامی جواب‌های ناصفر معادله با افزایش زمان t از نقطه تعادل مبدا دور می‌شوند. در این حالت، می‌گوییم که نقطه تعادل یک **منبع** است. اگر $a < 0$ تمامی جواب‌های ناصفر معادله با افزایش زمان t به نقطه تعادل مبدا میل می‌کنند، که در این حالت، مبدا یک **چاه** نامیده می‌شود. رفتار مجانبی جواب‌ها را با رسم آنها روی خط فاز $\mathbb{R}^1$ نمایش می‌دهیم. چون جواب $x(t)$ تابعی از زمان است، می‌توان $x(t)$ را به عنوان ذره‌ای متحرک در نظر گرفت که در طول محور حقیقی حرکت می‌کند. در نقطه تعادل، این ذره بدون حرکت باقی می‌ماند، که با یک نقطه توپر نمایش داده می‌شود.

اگر $a \neq 0$، معادله $x' = ax$ از منظر خاصی **پایدار** است؛ یعنی اگر a با یک ثابت دیگر که همعلامت با a است جایگزین شود، آنگاه رفتار کیفی جواب‌ها تغییر نمی‌کند. اما اگر $a = 0$، کمترین (کوچکترین) تغییر در a منجر به تغییر جدی در رفتار جواب‌ها می‌شود. بنابراین، می‌گوییم که در $a = 0$، یک **انشعاب** در خانواده تک پارامتری معادلات $x' = ax$ رخ می‌دهد. جواب معادله (۳) با شرط اولیه $x(0) = x_0$ توسط $x(t) = e^{at}x_0$ داده می‌شود. تابع $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\varphi(t, x_0) = e^{at}x_0$ را **جریان معادله دیفرانسیل** می‌نامیم که دارای دو خاصیت زیر است:

$$(i) \ \ \varphi(0, x_0) = x_0 \qquad\qquad (ii) \ \ \varphi(t+s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0)).$$

خانواده تک پارامتری (وابسته به پارامتر t) از نگاشت‌های اسکالر $\{\phi_t(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}_{t\in\mathbb{R}}$ تعریف شده با ضابطه $\phi_t(x_\circ)=\varphi(t,x_\circ)=e^{at}x_\circ$ که در شرایط

$$(i)\ \ \phi_\circ = i.d. \qquad\qquad (ii)\ \ \phi_{t+s}=\phi_t\circ\phi_s$$

صدق می‌کنند، یک **دستگاه دینامیکی** در $\mathbb{R}$ نامیده می‌شود. از خاصیت (i) و (ii) خاصیت (iii) نتیجه می‌شود:

$$(iii)\ \ \phi_t^{-1}=\phi_{-t}.$$

مثال. معادله اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$x'=f_a(x)=f(x;a)=ax(1-x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{۴}$$

جواب معادله (۴) با شرط اولیه $x(\circ)=x_\circ$ توسط

$$x(t,x_\circ)=\frac{x_\circ e^{at}}{1-x_\circ+x_\circ e^{at}},\quad t\in I_{x_\circ}=\text{بازه ماگزیمال وجود جواب}$$

داده می‌شود، که در آن $I_{x_\circ}=\mathbb{R}$ اگر $a=\circ$ یا $\circ\le x_\circ\le 1$. در غیر این صورت،

$$a>\circ \implies I_{x_\circ}=\begin{cases}(\frac{1}{a}\ln\frac{x_\circ-1}{x_\circ},+\infty) & x_\circ>1\ \text{اگر}\\ (-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{x_\circ-1}{x_\circ}) & x_\circ<\circ\ \text{اگر}\end{cases}\qquad a<\circ \implies I_{x_\circ}=\begin{cases}(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{x_\circ-1}{x_\circ}) & x_\circ>1\ \text{اگر}\\ (\frac{1}{a}\ln\frac{x_\circ-1}{x_\circ},+\infty) & x_\circ<\circ\ \text{اگر}\end{cases}$$

برای $a\neq\circ$ جواب‌های ثابت معادله عبارتند از $x(t)=\circ$ و $x(t)=1$. منحنی‌های انتگرال و نمای فاز معادله را می‌توانید در شکل زیر مشاهده کنید.

مثال. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$(\dot{x},\dot{y})=(y,-x),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{۵}$$

جواب این دستگاه با شرایط اولیه $x(\circ)=x_\circ$ و $y(\circ)=y_\circ$ به صورت زیر است:

$$x(t)=x_\circ\cos t+y_\circ\sin t,\quad y(t)=-x_\circ\sin t+y_\circ\cos t,\quad t\in\mathbb{R}.$$

منحنی‌های انتگرال و مدارهای معادله (۵)، با توجه به تعریف، عبارتند از

$$\text{منحنی‌های انتگرال معادله}=\{(t,x,y)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^2\mid x=x(t,x_\circ,y_\circ)=x_\circ\cos t+y_\circ\sin t,\ y=y(t,x_\circ,y_\circ)=-x_\circ\sin t+y_\circ\cos t\},$$

$$\text{مدارهای معادله}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=x_\circ^2+y_\circ^2\}=\text{دوایر متحدالمرکز حول مبدا}$$

تعریف. یک دستگاه خطی خودگردان در $\mathbb{R}^n$ به شکل زیر است:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ است.

تعریف. یک دستگاه غیرخطی خودگردان در $\mathbb{R}^n$ به شکل زیر است:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

نقطه $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه تعادل نامیده می‌شود هرگاه $f(\bar{x}) = ۰$.

اگر $\bar{x}$ یک نقطه تعادل باشد، آنگاه روشن است که تابع ثابت $x(t) = \bar{x}$ یک جواب بدیهی از معادله است که یک **جواب تعادلی** نامیده می‌شود.

جواب $x(t)$ **پایدار** نامیده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد $\delta(\varepsilon) = \delta > ۰$ به طوری که برای هر جواب دیگر $y(t)$ با خاصیت $|x(t_۰) - y(t_۰)| < \delta$ داشته باشیم $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ برای هر $t \geq t_۰$ که $t_۰ \in \mathbb{R}$. جواب $x(t)$ **ناپایدار** است هرگاه پایدار نباشد. جواب $x(t)$ **مجانبی پایدار** است، هرگاه اولا پایدار باشد و ثانیا وجود داشته باشد $b > ۰$ به طوری که برای هر جواب دیگر $y(t)$ با خاصیت $|x(t_۰) - y(t_۰)| < b$ داشته باشیم

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - y(t)| = ۰.$$

شکل زیر نشان می‌دهد که شرط دوم در تعریف فوق، پایداری را نتیجه نمی‌دهد. در واقع، نقطه تعادل موجود در این دو شکل (نمای فاز) شرط دوم را برآورده می‌کند ولی در شرط اول صدق نمی‌کند، یعنی پایدار نیست چون مدارهای شروع شده در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک آن سرانجام این همسایگی را ترک می‌کنند و از آن خارج می‌شوند ولی در نهایت و در زمان ∞ جذب نقطه تعادل می‌شوند. بنابراین، نقطه تعادلی که در شکل مشاهده می‌شود، ناپایدار است اما تمامی جواب‌های تعریف شده در همسایگی کوچک آن سرانجام به این نقطه تعادل میل می‌کنند هرگاه $t \to \infty$.

۱.۱ نگاشت پوانکاره

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$x' = ax(۱ - x) - h(۱ + \sin(۲\pi t)) = f(x, t; a, h), \tag{۶}$$

که در آن a و h پارامترهای مثبت هستند. این مثالی از یک معادله دیفرانسیل غیرخودگردان است. یک جواب $x(t)$ از این معادله باید به ازای هر t در معادله صدق کند. با استفاده از روش‌های متداول در حساب دیفرانسیل و انتگرال نمی‌توانیم برای آن جوابی تحلیلی بیابیم. جوابی که در شرط اولیه $x(۰) = x_۰$ صدق می‌کند، توسط $t \to \varphi(t, x_۰)$ داده می‌شود. در حالی که فرمولی برای این عبارت نداریم، می‌دانیم که این جواب در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\varphi(t, x_۰) = x_۰ + \int_۰^t f(\varphi(s, x_۰), s)ds.$$

اگر از این معادله نسبت به $x_۰$ مشتق بگیریم، آنگاه با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_۰}(t, x_۰) = ۱ + \int_۰^t \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, x_۰), s) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_۰}(s, x_۰)ds.$$

حال فرض کنید

$$z(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,x_0).$$

در این صورت،

$$z(0)=1,\quad z'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,x_0),t)\,z(t).$$

در نتیجه،

$$z(t)=z(0)\exp\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s,x_0),s)ds.$$

بنابراین،

$$z(1)=\exp\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s,x_0),s)ds=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(1,x_0).$$

قرار می‌دهیم $P(x_0)=\varphi(1,x_0)$. تابع P، **نگاشت پوانکاره** این معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. توجه کنید که جواب $\varphi(t,x_0)$ یک جواب تناوبی با دوره تناوب ۱ است هرگاه $P(x_0)=x_0$. حال مشتقات نگاشت پوانکاره را در نقطه x_0 تعیین می‌کنیم. داریم

$$P'(x_0)=\exp\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,x_0),t)dt>0,$$

بنابراین، P یک تابع صعودی است. دوباره با مشتق‌گیری بدست می‌آوریم

$$P''(x_0)=P'(x_0)\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t,x_0),t)\cdot\exp\left(\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s,x_0),s)ds\right)dt.$$

چون $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a<0$، پس $P''(x_0)<0$ و در نتیجه، نمودار تابع P صعودی و مقعر است. از این خاصیت نتیجه می‌شود که خط $y=x$ نمودار تابع P را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین، نگاشت پوانکاره حداکثر ۲ نقطه ثابت دارد. این نقاط ثابت متناظر با جواب‌های تناوبی معادله دیفرانسیل اولیه هستند. این جواب‌ها به ازای هر t در رابطه $x(t+1)=x(t)$ صدق می‌کنند. به بیان دیگر، $\varphi(t,x_0)$ نسبت به t تابعی تناوبی با دوره تناوب ۱ است، هرگاه x_0 یکی از نقاط ثابت نگاشت پوانکاره باشد.
با توجه به اینکه

$$f(x,t)=f(x,t+1),\ \ \forall\, t\in\mathbb{R},$$

اگر $x(t)$ جوابی از معادله (۶) با شرط $x(0)=x(1)$ باشد، آنگاه تابع $y(t)=x(t+1)$ نیز جوابی از معادله است که در شرط $y(0)=x(0)=x_0$ صدق می‌کند. بنابراین، از قضیه وجود و یکتایی جواب‌ها، نتیجه می‌شود که این دو جواب بر هم منطبق هستند، یعنی $y(t)=x(t)$. بنابراین،

$$x(t+1)=x(t),\ \ \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

۲.۱ دستگاه‌های خطی

در این بخش، به مطالعه‌ی دستگاه‌های خطی به فرم

$$\dot{x}=Ax,\ \ x\in\mathbb{R}^n,$$

می‌پردازیم که در آن A یک ماتریس $n \times n$ است و

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T.$$

جواب این دستگاه خطی همراه با شرط اولیه $x(0) = x_0$ توسط $x(t) = e^{At}x_0$ داده می‌شود که در آن e^{At} یک ماتریس $n \times n$ است که با بسط تیلورش تعریف می‌شود:

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n.$$

نحوه‌ی محاسبه‌ی ماتریس e^{At} را برحسب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس مربعی A ارائه خواهیم داد.

مثال. معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = 3x_2.$$

جواب $x(t, x_0)$ از نظر هندسی بیانگر حرکت از هر نقطه $x_0 \in \mathbb{R}^2$ به نقطه $x(t) \in \mathbb{R}^2$ بعد از زمان t می‌باشد. این حرکت با رسم منحنی‌های جواب در صفحه‌ی x_1x_2 که آنرا **صفحه‌ی فاز** می‌نامیم و استفاده از پیکان‌های جهت‌دار برای نشان دادن جهت حرکت در طول آنها با افزایش زمان، قابل توصیف است.

مثال. معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2.$$

نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ با ضابطه‌ی $f(x) = Ax$، یک میدان برداری در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند، یعنی، به هر نقطه مانند $x \in \mathbb{R}^n$ یک بردار مانند $f(x)$ نسبت می‌دهد.

اگر هر بردار $f(x)$ را با نقطه شروع $x \in \mathbb{R}^n$ رسم کنیم، آنگاه یک نمایش هندسی از میدان برداری حاصل می‌شود.

چون $\dot{x}(t) = f(x(t))$ بردار سرعت را نمایش می‌دهد، پس منحنی‌های جواب معادله $\dot{x} = f(x)$ در $\mathbb{R}^n$ به بردارهای حاصل از میدان برداری $f(x)$ مماس خواهند بود.

مثال. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$(i) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \qquad (ii) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases}$$

۳.۱ فرآیند قطری سازی

از روش جبری قطری کردن یک ماتریس مربعی A می‌توان برای تبدیل دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ به یک دستگاه خطی جداشدنی استفاده کرد. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که ماتریس A دارای مقادیر ویژه حقیقی و متمایز است. از جبر خطی قضیه زیر را داریم.

قضیه: اگر $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه **حقیقی و متمایز** ماتریس A باشند، آنگاه بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه، $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$، یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند و ماتریس $P = [v_1\, v_2\, \ldots\, v_n]$ وارون پذیر است و داریم

$$P^{-1}AP = diag[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

تحت شرایط قضیه قبل،

$$x \in \mathbb{R}^n = Span\{v_1, \ldots, v_n\} \implies \exists\,!\, y \in \mathbb{R}^n :\ x = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n = [v_1\, v_2\, \ldots\, v_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Py.$$

با استفاده از تغییر متغیر خطی $x = Py$، دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ به دستگاه جداشدنی

$$\dot{y} = P^{-1}APy = diag[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]y,$$

تبدیل می‌شود. بنابراین،

$$y(t) = diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]y(0); \qquad x(t) = P\, diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}x(0).$$

مثال. معادله خطی $\dot{x} = Ax$ با $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

تعریف. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با k مقدار ویژه منفی و متمایز $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ و $n-k$ مقدار ویژه مثبت و متمایز $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ باشد. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_n\}$ بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه باشند. آنگاه زیرفضاهای خطی پایدار E^s و ناپایدار E^u از دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E^s = Span\{v_1, \ldots, v_k\}, \quad \dim E^s = k, \qquad E^u = Span\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}, \quad \dim E^u = n-k.$$

مثال. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۴.۱ نمای یک عملگر

فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک عملگر خطی در $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = I + T + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \ldots, \qquad ||T|| = \max_{|x| \le 1} |Tx|, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که

$$(i)\ \ |Tx| \le ||T||\,|x| \ \ (\forall\, x \in \mathbb{R}^n) \qquad (ii)\ \ ||TS|| \le ||T||\,||S|| \qquad (iii)\ \ ||T^k|| \le ||T||^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

تعریف. برای $t \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم

$$e^{At} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

گزاره. اگر T و P تبدیل‌های خطی در $\mathbb{R}^n$ باشند و $S = PTP^{-۱}$، آنگاه $e^S = Pe^T P^{-۱}$.

گزاره. اگر T و S تبدیل‌های خطی در $\mathbb{R}^n$ باشند که با یکدیگر جابجا شوند، یعنی $TS = ST$، آنگاه $e^{T+S} = e^T e^S$.

نتیجه. اگر T یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $(e^T)^{-۱} = e^{-T}$.

اثبات. با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
TS = ST \quad &\Longrightarrow \quad \frac{(T+S)^n}{n!} = \sum_{k=۰}^{n} \frac{T^k S^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(T+S)^n}{n!} = \sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{k=۰}^{n} \frac{T^k S^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{k=۰}^{n} f(k, n-k) = \sum_{k=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty} f(k,n) = \sum_{k=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{T^k S^n}{k!n!} \\
&\Longrightarrow \quad e^{T+S} = e^T e^S.
\end{aligned}$$

برای اثبات تساوی

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{k=۰}^{n} f(k, n-k) = \sum_{k=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty} f(k,n),$$

کافی است سمت چپ تساوی فوق را به صورت سطری بنویسیم و به صورت ستونی جمع بزنیم:

$$\begin{aligned}
&f(۰,۰) + \\
&f(۰,۱) + f(۱,۰) + \\
&f(۰,۲) + f(۱,۱) + f(۲,۰) + \\
&f(۰,۳) + f(۱,۲) + f(۲,۱) + f(۳,۰) + \dots \\
&= \sum_{n=۰}^{\infty} f(۰,n) + \sum_{n=۰}^{\infty} f(۱,n) + \sum_{n=۰}^{\infty} f(۲,n) + \dots = \sum_{k=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty} f(k,n).
\end{aligned}$$

گزاره. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{bmatrix}$، آنگاه $e^A = e^a \begin{bmatrix} ۱ & b \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$.

اثبات.

$$A = a\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = aI + bN \Longrightarrow e^A = e^{aI+bN} = e^{aI}e^{bN} = e^a I(I+bN) = e^a \begin{bmatrix} ۱ & b \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

گزاره. اگر $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، آنگاه $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

اثبات. اگر قرار دهیم $\lambda = a + ib$، آنگاه خواهیم داشت $a = Re(\lambda)$ و $b = Im(\lambda)$. حال با استفاده از روابط

$$Re(z_۱z_۲) = Re(z_۱)Re(z_۲) - Im(z_۱)Im(z_۲), \qquad Im(z_۱z_۲) = Re(z_۱)Im(z_۲) + Re(z_۲)Im(z_۱),$$

و با استقرای ریاضی روی $n \geq ۱$، اثبات می‌شود که

$$A^n = \begin{bmatrix} Re(\lambda^n) & -Im(\lambda^n) \\ Im(\lambda^n) & Re(\lambda^n) \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$e^A = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{bmatrix} Re(e^\lambda) & -Im(e^\lambda) \\ Im(e^\lambda) & Re(e^\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{bmatrix}.$$

قضیه اساسی برای دستگاه‌های خطی: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت، برای هر $x_۰ \in \mathbb{R}^n$، مسئله مقدار اولیه

$$\dot{x} = Ax, \quad x(۰) = x_۰, \tag{۷}$$

دارای جواب یکتای $x(t) = e^{At}x_۰$ است.

اثبات. واضح است که $e^{At}x_۰$ جوابی از این مسئله است. برای اثبات یکتایی جواب، فرض می‌کنیم $x(t)$ یک جواب دلخواه باشد و قرار می‌دهیم $y(t) = e^{-At}x(t)$. در این صورت،

$$y'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = ۰ \implies y(t) = y(۰) \implies e^{-At}x(t) = x(۰) \implies x(t) = e^{At}x_۰.$$

لم. اگر $\varphi(t, x_۰) = e^{At}x_۰$، آنگاه $\lim_{y \to x_۰} \varphi(t, y) = \varphi(t, x_۰)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$. در واقع،

$$۰ \leq |\varphi(t, y) - \varphi(t, x_۰)| = |e^{At}y - e^{At}x_۰| = |e^{At}(y - x_۰)| \leq ||e^{At}||\,|y - x_۰| \to ۰ \text{ as } y \to x_۰ \ (\forall\, t \in \mathbb{R}).$$

مثال. جواب مسئله مقدار اولیه (۷) را بیابید هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}.$$

۵.۱ دسته‌بندی نمای فاز دستگاه‌های خطی در $\mathbb{R}^۲$

اگر A یک ماتریس ۲×۲ با درایه‌های حقیقی باشد، آنگاه ماتریس وارون پذیر P چنان موجود است که $P^{-۱}AP = J$ به فرم زیر است:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \mu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

با تغییر متغیر $x = Py$، معادله‌ی $\dot{x} = Ax$ به معادله‌ی $\dot{y} = Jy$ تبدیل می‌شود. حال نمای فاز این معادله را در حالت‌های مختلف تعیین می‌کنیم.

$$(i)\;\; J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; \lambda < 0 < \mu \qquad (ii)\;\; J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; \lambda \leq \mu < 0$$

$$(iii)\;\; J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; \lambda \geq \mu > 0 \qquad (iv)\;\; J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; \lambda\mu = 0$$

$$(v)\;\; J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; \lambda = 0 \;\text{and}\; \lambda \neq 0 \qquad (vi)\;\; J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; a < 0, b \neq 0$$

$$(vii)\;\; J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; a > 0, b \neq 0 \qquad (viii)\;\; J = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}, \;\text{with}\;\; b \neq 0.$$

قضیه. دستگاه $\dot{x} = Ax$ را در نظر بگیرید که در آن $x \in \mathbb{R}^2$ و A یک ماتریس حقیقی 2×2 است. قرار دهید $\tau = tr(A)$ و $\sigma = \det(A)$. در این صورت،

(الف) اگر $\sigma < 0$، آنگاه مبدا یک زین هذلولوی است.

(ب) اگر $\sigma > 0$ و $\tau^2 - 4\sigma \geq 0$، آنگاه مبدا برای $\tau < 0$ یک گره پایدار و برای $\tau > 0$ یک گره ناپایدار است.

(ج) اگر $\sigma > 0$ و $\tau^2 - 4\sigma < 0$ و $\tau \neq 0$، آنگاه مبدا یک کانون است که این کانون برای $\tau < 0$ پایدار و برای $\tau > 0$ ناپایدار است.

(د) اگر $\sigma > 0$ و $\tau = 0$، آنگاه مبدا یک مرکز است.

اگر $\sigma = 0$، آنگاه مبدا یک نقطه تعادل تباهیده و یا غیرهذلولوی نامیده میشود. در این حالت، حداقل یکی از مقادیر ویژه ماتریس A برابر صفر است.

مثال. نوع نقطه تعادل در مبدا را برای دستگاه خطی مسطح $\dot{x} = Ax$ مشخص کنید هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \;\; A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \;\; A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \;\; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

۶.۱ مقادیر ویژه مختلط

اگر A یک ماتریس حقیقی $2n \times 2n$ باشد که دارای $2n$ مقدار ویژه مختلط و متمایز

$$\lambda_j = a_j + ib_j, \quad \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$$

با بردارهای ویژه مختلط

$$w_j = u_j + iv_j, \quad \bar{w}_j = u_j - iv_j, \;\; 1 \leq j \leq n,$$

است، آنگاه مجموعه بردارهای

$$\{u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n\}$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^{2n}$ است و ماتریس P به صورت

$$P = [v_1\, u_1\, v_2\, u_2\, \ldots\, v_n\, u_n]$$

وارون پذیر است و داریم که

$$P^{-1}AP = diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} =$$ یک ماتریس حقیقی $2n \times 2n$ با بلوک‌های 2×2 روی قطر اصلی

نتیجه. تحت شرایط قضیه قبل، جواب دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ با شرط اولیه $x(0) = x_0$ به صورت زیر است:

$$x(t) = e^{At}x_0 = P \text{ diag } e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{bmatrix} P^{-1}x_0.$$

مثال. ماتریس e^{At} را بیابید هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

حل. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A به ترتیب عبارتند از

$$\lambda_1=-1+i,\quad \bar{\lambda}_1=-1-i,\quad \lambda_2=1+i,\quad \bar{\lambda}_2=1-i,\quad w_1=\begin{bmatrix} i\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad w_2=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -1+i\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$P=[v_1\, u_1\, v_2\, u_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=B.$$

$$e^{Bt}=\begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t & 0 & 0\\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{t}\cos t & -e^{t}\sin t\\ 0 & 0 & e^{t}\sin t & e^{t}\cos t\end{bmatrix},$$

$$e^{At}=P\,e^{Bt}\,P^{-1}=\begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t & 0 & 0\\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{t}(\cos t-\sin t) & -2e^{t}\sin t\\ 0 & 0 & e^{t}\sin t & e^{t}(\cos t+\sin t)\end{bmatrix}.$$

مثال. ماتریس e^{At} را بیابید هرگاه

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}.$$

حل. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A به ترتیب عبارتند از

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 2+3i,\quad \bar{\lambda}_2 = 2-3i,\quad v_1 = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2 + iv_2,$$

$$P = [v_1\, v_2\, u_2] = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = B.$$

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos 3t & -e^{2t}\sin 3t \\ 0 & e^{2t}\sin 3t & e^{2t}\cos 3t \end{bmatrix},\quad e^{At} = P\, e^{Bt}\, P^{-1}.$$

۷.۱ مقادیر ویژه حقیقی و تکراری

تعریف (بردار ویژه تعمیم یافته). فرض کنید λ یک مقدار ویژه تکراری با مرتبه تکرار $m \le n$ از ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ باشد. در این صورت، برای $k = 1, 2, \ldots, m$، هر جواب ناصفر v از معادله‌ی $(A - \lambda I)^k v = 0$ یک بردار ویژه تعمیم یافته نامیده می‌شود.

قضیه (هرچ و اسمیل). فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ با مقادیر ویژه حقیقی $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ باشد. در این صورت، پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ متشکل از بردارهای ویژه تعمیم یافته $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ وجود دارد به طوری که ماتریس $P = [v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n]$ وارون پذیر است و $A = S + N$ که در آن $S = P\,\mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\,P^{-1}$ و $N = A - S$ یک ماتریس پوچ توان از مرتبه‌ی $k \le n$ است که با S جابجا می‌شود، یعنی، $NS = SN$.

نتیجه. تحت فرض‌های قضیه قبل، جواب دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ با شرط اولیه $x(0) = x_0$، به شکل زیر است:

$$x(t) = P\,\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right]\, P^{-1}\, \left[I + tN + \ldots + \frac{t^{k-1}N^{k-1}}{(k-1)!}\right] x_0.$$

مثال. ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به صورت $A = S + N$ تجزیه کنید و سپس جواب یکتای مسئله مقدار اولیه (۷) را بیابید.

حل. ابتدا چندجمله‌ای مشخصه A را تعیین می‌کنیم.

$$\chi_A(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t+1 & -1 & 2 \\ 0 & t+1 & -4 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1)^2 = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2},$$

که در آن

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = -1,\quad n_1 = 1,\quad n_2 = 2,\quad k = \max\{n_1, n_2\} = 2.$$

بنابراین،

$$(A-\lambda_1 I)^{n_1}v=(A-I)v=0 \implies v_1=(0,2,1), \qquad (A-\lambda_2 I)^{n_2}v=(A+I)^2v=0 \implies v_2=(1,0,0) \quad v_3=(0,1,0).$$

$$P=[v_1\, v_2\, v_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{bmatrix}, \quad S=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&4\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$N=A-S=\begin{bmatrix}0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \implies N^2=0 \implies e^{At}=P\,\mathrm{diag}\left[e^t,e^{-t},e^{-t}\right]\,P^{-1}[I+tN]=\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}&-2te^{-t}\\0&e^{-t}&4\sinh t\\0&0&e^t\end{bmatrix}.$$

۸.۱ مقادیر ویژه مختلط و تکراری

فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $2n\times 2n$ با مقادیر ویژه مختلط زیر باشد

$$\lambda_j=a_j+ib_j, \quad \bar{\lambda}_j=a_j-ib_j, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

در این صورت، بردارهای ویژه مختلط تعمیم یافته

$$w_j=u_j+iv_j, \quad \bar{w}_j=u_j-iv_j, \quad 1\le j\le n,$$

وجود دارند به طوری که مجموعه بردارهای

$$\{v_1,u_1,v_2,u_2,,v_n,u_n\},$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^{2n}$ است. برای چنین پایه‌ای، ماتریس $P=[v_1\, u_1\, \ldots\, v_n\, u_n]$ وارون پذیر است و می‌توان نوشت $A=S+N$، که در آن

$$S=P\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix}a_j&-b_j\\b_j&a_j\end{bmatrix}P^{-1}, \quad N=A-S.$$

در اینجا، N یک ماتریس پوچ توان از مرتبه $k\le 2n$ است که با S جابجا می‌شود، یعنی $SN=NS$.

نتیجه.

$$e^{At}=e^{St}\cdot e^{Nt}=P\,\mathrm{diag}\, e^{a_jt}\begin{bmatrix}\cos b_jt&-\sin b_jt\\\sin b_jt&\cos b_jt\end{bmatrix}\,P^{-1}[I+tN+\ldots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}].$$

مثال. ماتریس e^{At} را بیابید هرگاه

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

حل. می‌توان نوشت

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=S+N; \quad N^{۲}=۰, \quad SN=NS=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow e^{At}=e^{(S+N)t}=e^{St}e^{Nt}=e^{St}(I+tN)=e^{t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & ۰ & ۰ \\ \sin t & \cos t & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cos t & -\sin t \\ ۰ & ۰ & \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & t & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & t \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=e^{t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & t\cos t & -t\sin t \\ \sin t & \cos t & t\sin t & t\cos t \\ ۰ & ۰ & \cos t & -\sin t \\ ۰ & ۰ & \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$