به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان-دانشکده علوم ریاضی

حل مسائل امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۶-۹۵

---

۱. فرض کنید $f(x) = \int_{1}^{x^3} \frac{dt}{4 + t^2 \cosh t}$.

الف) مشتق تابع f را به دست آورید.

ب) نشان دهید f وارون‌پذیر است و مشتق تابع وارون را در $x = 0$ به دست آورید. (۱۰ نمره)

الف) با فرض $g(x) = \frac{1}{4 + x^2 \cosh x}$، چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ تابع‌های x^3 و $\cosh x$ پیوسته هستند و $4 + x^2 \cosh x \neq 0$ بنابراین تابع g روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. (۱ نمره)

در نتیجه طبق قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال تابع $h(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{4 + t^2 \cosh t}$ مشتق‌پذیر است.(۱ نمره)

حال اگر $k(x) = x^3$، آنگاه $k(x)$ روی $x \in \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و چون $f(x) = (h \circ k)(x)$، پس f بعنوان ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر خواهد بود.(۱ نمره)

بنابراین با استفاده از قاعده‌ی رنجیری در مشتق‌گیری و قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهیم داشت.(۱ نمره)

$$f'(x) = k'(x)h'(k(x)) = \frac{3x^2}{4 + x^2 \cosh x}$$

ب) طبق قسمت الف برای هر $x > 0$، $f'(x) > 0$ و برای هر $x < 0$ نیز $f'(x) > 0$. در نتیجه f بر هر یک از فواصل $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ اکیدا صعودی است. با توجه به پیوستگی f در $x = 0$، این تابع بر $\mathbb{R}$ اکیدا صعودی و در نتیجه وارون‌پذیر است. با توجه به اینکه $f(1) = 0$، خواهیم داشت $f^{-1}(0) = 1$.
(۱ نمره).

بعلاوه $f'(1) = \frac{3}{4 + \cosh 1} \neq 0$ (۱ نمره).

در نتیجه طبق قضیه‌ی مشتق تابع وارون، f^{-1} در $x = 0$ مشتق‌پذیر است (۱ نمره) و

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4 + \cosh(1)}{3}$$

(۲ نمره)

۲. الف) اکسترمم‌های تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\ln x}$ را بر بازه‌ی $(۰, \infty)$ تعیین کنید.
ب) اگر $F : (۰, \infty) \to \mathbb{R}$ تابع اولیه‌ای برای f با شرط $F(۱) = ۰$ باشد نشان دهید که معادله‌ی $F(x) = \frac{۱}{۲}x$ دقیقاً یک جواب دارد. (۲۰ نمره)

الف. ابتدا نقاط بحرانی f بر بازه $(۰, \infty)$ را تعیین می‌کنیم. از آنجا که $f(x) = x^{\ln x} = e^{(\ln x)^۲}$ تابعی مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی f بر این بازه جواب‌های معادله $f'(x) = ۰$ است.

$$\forall x \in (۰, \infty), \qquad f'(x) = ((\ln x)^۲)' e^{(\ln x)^۲} = \frac{۲\ln x}{x} e^{(\ln x)^۲} \qquad \text{(۵ نمره)}$$

معادله $f'(x) = \frac{۲\ln x}{x} e^{(\ln x)^۲} = ۰$ دارای جواب $x = ۱$ است. بنابر این تنها نقطه بحرانی f بر $(۰, \infty)$ نقطه $x = ۱$ است. با استفاده از آزمون مشتق اول

$$\forall x \in (۰, ۱), \quad \ln x < ۰ \;\Rightarrow f'(x) = \frac{۲\ln x}{x} e^{(\ln x)^۲} < ۰ \;\Rightarrow \forall x \in (۰, ۱], \; f(x) \geq f(۱)$$
$$\forall x \in (۱, \infty), \quad \ln x > ۰ \;\Rightarrow f'(x) = \frac{۲\ln x}{x} e^{(\ln x)^۲} > ۰ \;\Rightarrow \forall x \in [۱, \infty) \; f(x) \geq f(۱)$$

در نتیجه $f(۱) = ۱$ مینیمم مطلق تابع f بر $(۰, \infty)$ است. این تابع بر این بازه ماکزیمم مطلق یا نسبی ندارد. (۵ نمره)

ب. تابع g با ضابطه $g(x) = F(x) - \frac{۱}{۲}x$ بر بازه $(۰, \infty)$ تعریف شده، بر این بازه تابعی پیوسته است. با توجه به این که F تابع اولیه‌ای برای f بر $(۰, \infty)$ است و با استفاده از نتیجه قسمت (الف) داریم

$$\forall x \in (۰, \infty), \quad F'(x) = f(x) \geq f(۱) = ۱$$

در نتیجه

$$\forall x \in (۰, \infty), \quad g'(x) = F'(x) - \frac{۱}{۲} \geq ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} > ۰$$

به این ترتیب، $g : (۰, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی اکیدا صعودی و در نتیجه یک به یک است. پس حداکثر در یک نقطه مقدار آن می‌تواند صفر شود. (یا این استدلال که معادله $g'(x) = ۰$ ریشه‌ای ندارد و در نتیجه بنابر قضیه رل، معادله $g(x) = ۰$ حداکثر یک ریشه دارد.) (۵ نمره)

اکنون بری اثبات وجود حداقل یک ریشه برای این معادله از قضیه بولتسانو استفاده می‌کنیم. با استفاده از فرض $g(۱) = F(۱) - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲} < ۰$. برای پیدا کردن نقطه‌ای که در آن مقدار g مثبت شود از روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد. به طور مثال با استفاده از قسمت (الف)

$$\forall x \in (۰, \infty), \quad f(x) \geq ۱ \;\Rightarrow\; \forall x > ۱ \;\; \int_۱^x f(t)\,dt \geq \int_۱^x ۱\,dt$$
$$\Rightarrow\; F(x) - F(۱) \geq x - ۱$$

$$\Rightarrow \quad F(x) \geq x - ۱$$

در نتیجه $F(۲) \geq ۱$ و از آنجا $g(۲) = F(۲) - ۱ \geq ۰$. اگر $g(۲) = ۰$ آنگاه $x = ۲$ یک ریشه معادله $g(x) = ۰$ است. در غیر این صورت $g(۲) > ۰$. با توجه به پیوستگی g بر $[۱,۲]$ و این که $g(۱)g(۲) < ۰$ با استفاده از قضیه بولتسانو، $c \in (۱,۲)$ وجود دارد که $g(c) = ۰$. (۵ نمره)

---

۳. انتگرال‌های زیر را حساب کنید. (۲۰ نمره)

الف) $\int \frac{dx}{e^{۲x} + ۱}$ ب) $\int \frac{۱}{\sqrt{(x^۲ + ۴x + ۵)^۳}}\, dx$ ج) $\int_۱^e x^۲ (\log_۳ x)\, dx$

الف.

$$I := \int \frac{dx}{e^{۲x} + ۱} = \int \frac{e^{۲x} + ۱ - e^{۲x}}{e^{۲x} + ۱} dx = \int dx - \int \frac{e^{۲x}}{e^{۲x} + ۱} dx \qquad \text{(۲ نمره)}$$

اکنون با استفاده از تغییر متغیر $u = e^{۲x} + ۱$، (۱ نمره) خواهیم داشت $du = ۲e^{۲x}dx$ (۱ نمره) و در نتیجه

$$I = x - \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{u} = x - \frac{۱}{۲}\ln|u| + C = x - \frac{۱}{۲}\ln(e^{۲x} + ۱) + C \qquad \text{(۲ نمره)}$$

روش دوم: استفاده از تجزیه کسرها، با تغییر متغیر $u = e^{۲x}$، خواهیم داشت $۲e^{۲x}dx = du$ و در نتیجه $dx = \frac{۱}{۲}e^{-۲x}du = \frac{۱}{۲u}du$ (۲ نمره). در نتیجه

$$I = \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{u(u+۱)} = \frac{۱}{۲}\int (\frac{۱}{u} - \frac{۱}{u+۱})du = x - \frac{۱}{۲}\ln(e^{۲x} + ۱) + C \qquad \text{(۴ نمره)}$$

ب.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^۲ + ۴x + ۵)^۳}} = \int \frac{dx}{\sqrt{((x+۲)^۲ + ۱)^۳}} \qquad \text{(۲ نمره)}$$

با تغییر متغیر $x + ۲ = \tan\theta$ خواهیم داشت $dx = (۱ + \tan^۲\theta)d\theta = \sec^۲\theta\, d\theta$ (۲ نمره). در نتیجه

$$I = \int \frac{\sec^۲\theta}{\sec^۳\theta} d\theta = \int \cos\theta\, d\theta = \sin\theta + C = \sin(\tan^{-۱}(x+۲)) + C \quad \text{(۳ نمره)}$$

ج.

$$I = \int_۱^e x^۲ (\log_۳ x) dx = \int_۱^e x^۲ \frac{\ln x}{\ln ۳} dx = \frac{۱}{ln۳}\int_۱^e x^۲ \ln x\, dx \qquad \text{(۱ نمره)}$$

با استفاده از روش جزء به جزء،

$$\int x^{۲} \ln x \, dx = \frac{۱}{۳}x^{۳} \ln x = \frac{۱}{۳}\int x^{۳}\frac{۱}{x}dx = \frac{۱}{۳}x^{۳}\ln x - \frac{۱}{۹}x^{۳} + C \quad \text{(۳ نمره)}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} I = [\frac{۱}{۳}x^{۳}\ln x - \frac{۱}{۹}x^{۳}]_{۱}^{e} &= \frac{۱}{۳}e^{۳}\ln e - \frac{۱}{۹}e^{۳} + \frac{۱}{۹} \\ &= \frac{۱}{۳}e^{۳} - \frac{۱}{۹}e^{۳} - \frac{۱}{۹} = \frac{۲e^{۳} - ۱}{۹} \quad \text{(۳ نمره)} \end{aligned}$$

---

۴. همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرال‌های زیر را بررسی کنید. (۱۵ نمره)

(الف) $\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}\cosh x}\, dx$ ب) $\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x}\cosh x}\, dx$

الف. برای هر $x \in (۰, ۱]$، $۰ < \frac{۱}{\sqrt{x}\cosh x} \leq \frac{۱}{\sqrt{x}}$. همچنین

$$\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to ۰^{+}} \int_{c}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to ۰^{+}} ۲x^{\frac{۱}{۲}}|_{c}^{۱} = ۲$$

در نتیجه انتگرال ناسره $\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}}dx$ همگرا بوده، بنابر آزمون مقایسه انتگرال ناسره $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{x}\cosh x}$ نیز همگرا است.

ب. همگرایی دو انتگرال ناسره $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{x}\cosh x}$ و $\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\cosh x}$ را بررسی می‌کنیم. انتگرال اول بنابر قسمت (الف) همگرا است. همگرایی انتگرال دوم را بررسی می‌کنیم.

$$\forall x \geq ۱, \quad ۰ < \frac{۱}{\sqrt{x}\cosh x} \leq \frac{۱}{\cosh x} = \frac{۲}{e^{x} + e^{-x}} \leq \frac{۲}{e^{x}} = ۲e^{-x}$$

همچنین

$$\int_{۱}^{\infty} ۲e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\int_{۱}^{c} ۲e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty} (- \frac{۱}{۲}e^{-x}|_{۱}^{c}) = \frac{۱}{۲e}$$

مجددا بنابر آزمون مقایسه انتگرال ناسره $\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\cosh x}$ همگرا بوده، در نتیجه انتگرال ناسره $\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\cosh x}$ همگرا است.

---

۵. برای هر عدد حقیقی $x > ۰$ نشان دهید $\tan^{-۱} x > \frac{x}{x^۲ + ۱}$. (۵ نمره)

تابع $f : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \tan^{-۱} x - \frac{x}{x^۲ + ۱}$ بر $[۰, \infty)$ پیوسته و بر $(۰, \infty)$ مشتق‌پذیر است.

$$\forall x \in (۰, \infty), \quad f'(x) = \frac{۱}{x^۲ + ۱} - \frac{x^۲ + ۱ - ۲x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = \frac{۲x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} > ۰$$

در نتیجه f بر $[۰, \infty)$ اکیدا صعودی است. پس

$$\forall x > ۰, \quad f(x) = \tan^{-۱} x - \frac{x}{۱ + x^۲} > f(۰) = ۰$$

و از آنجا $\tan^{-۱} x > \frac{x}{x^۲ + ۱}$.

---

۶. دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۳x - ۱)^n}{۵^n}$ را تعیین کنید. (۵ نمره)

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۳x - ۱)^n}{۵^n} = \sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{۳}{۵})^n (x - \frac{۱}{۳})^n = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - \frac{۱}{۳})^n$$

که در آن $a_n = (\frac{۳}{۵})^n$. در نتیجه شعاع همگرایی این سری توان برابر است با $R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+۱}|} = \frac{۵}{۳}$.
پس سری توانی فوق بر $(\frac{۱}{۳} - \frac{۵}{۳}, \frac{۱}{۳} + \frac{۵}{۳}) = (-\frac{۴}{۳}, ۲)$ همگرا و بر $(-\infty, -\frac{۴}{۳}) \cup (۲, +\infty)$ واگرا است.
برای دو نقطه $x = -\frac{۴}{۳}$ و $x = ۲$ مستقیما با جایگذاری این مقادیر در سری توان همگرایی یا واگرایی را بررسی می‌کنیم.

$$x = -\frac{۴}{۳} : \qquad \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۳x - ۱)^n}{۵^n} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۵)^n}{۵^n} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \quad \text{واگرا است}$$

$$x = ۲ : \qquad \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۳x - ۱)^n}{۵^n} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۵^n}{۵^n} = \sum_{n=۰}^{\infty} ۱ \quad \text{واگرا است}$$

در نتیجه دامنه همگرایی این سری توان عبارت است از $D = (-\frac{۴}{۳}, ۲)$.