حل مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ - ترم اول ۹۳-۹۲

سئوال ۱. الف) نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ که در آن e عدد نپر است یک سری همگرا است و مقدار آن را تعیین کنید.

ب) همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh n}$ را بررسی کنید.

حل. الف) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{e}$ است. بنابراین دنباله مجموع جزئی این سری، عبارتست از

$$s_n = \frac{1/e(1-(1/e)^n)}{1-1/e}.$$

چون داریم $\frac{1}{e} < 1$، بنابراین دنباله فوق و درنتیجه سری همگرا است و مقدار حد برابر $\frac{1}{e-1} = \frac{1/e}{1-1/e}$ است. (۱۰ نمره)

ب) با توجه به مثبت بودن جملات سری، می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. داریم

$$0 < \frac{1}{\cosh n} = \frac{2}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{2}{e^n}.$$

از طرف دیگر طبق قسمت الف، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ همگراست. بنابراین طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh n}$ نیز همگرا است. (۱۰ نمره)

سئوال ۲. الف) فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرای مطلق و $\{b_n\}$ دنباله‌ای همگرا به عدد $\ell \neq 0$ باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $b_n \neq 0$.

الف) نشان دهید که عدد $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N$، $\frac{|\ell|}{2} < |b_n| < \frac{3|\ell|}{2}$.

ب) نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ همگرای مطلق است.

حل. الف) با استفاده از فرض $\ell = \lim_n b_n$ و استفاده از تعریف حد یک دنباله، برای $0 < \epsilon = \frac{|\ell|}{2}$ عدد $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \;\Rightarrow\; |b_n - \ell| < \epsilon$$

با توجه به اینکه $||b_n| - |\ell|| \leq |b_n - \ell|$، خواهیم داشت

$$\forall n \geq N, \quad ||b_n| - |\ell|| \leq |b_n - \ell| < \epsilon = \frac{|\ell|}{2}$$

و از آنجا

$$-\frac{|\ell|}{2} < |b_n| - |\ell| < \frac{|\ell|}{2}$$

که از آن نامساوی مورد نظر به دست می‌آید. (۵ نمره)

ب) (راه اول) بنا به فرض، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا است. با استفاده از آزمون مقایسه حدی برای دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{a_n}{b_n}|$ خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{a_n}{b_n}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{|\ell|}$$

که عددی حقیقی و غیر صفر است. بنابر آزمون مقایسه حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{a_n}{b_n}|$ همگرا و در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ همگرای مطلق است.

(راه دوم) با استفاده از قسمت (الف)، عدد $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N$، $|b_n| > \frac{|\ell|}{2}$ و یا $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|\ell|}$. در نتیجه

$$\forall n \geq N, \quad |\frac{a_n}{b_n}| < \frac{2}{|\ell|}|a_n|$$

با توجه به همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ و در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|\ell|}|a_n|$ و با استفاده از آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{a_n}{b_n}|$ نیز همگراست.

در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ همگرای مطلق است. (۱۰ نمره)

سئوال ۳. الف) نشان دهید که تابع f با ضابطه زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-۱-x}{x^۲} & x\neq ۰\\[2mm] \dfrac{۱}{۲} & x=۰\end{cases}$$

ب) نشان دهید که عدد حقیقی $c>۰$ وجود دارد که $e^c=۱+c+c^۲$.

حل. الف) با توجه به پیوستگی تابع نمایی و هر تابع چندجمله‌ای، تابع $g_۱$ با ضابطه $g_۱(x)=e^x-(x+۱)$ بر سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است. در نتیجه تابع با ضابطه $\dfrac{e^x-(x+۱)}{x^۲}$ در هر نقطه که ریشه مخرج نباشد پیوسته خواهد بود. پس f بر $\mathbb{R}-\{۰\}$ پیوسته است. (۷ نمره)

اکنون پیوستگی در $x=۰$ را ثابت می‌کنیم. برای $x\neq ۰$ با شرط $|x|<۱$ داریم

$$\begin{aligned}
|\frac{e^x-۱-x}{x^۲}-\frac{۱}{۲}| &= |\frac{\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-۱-x}{x^۲}-\frac{۱}{۲}|\\
&= |\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{x^{n-۲}}{n!}-\frac{۱}{۲}|\\
&= |\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{x^{n-۲}}{n!}|\\
&= |x|\,|\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{x^{n-۳}}{n!}|\\
&\leq |x|\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{|x|^{n-۳}}{n!}<|x|\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{n!}=|x|(e-\frac{۵}{۲})
\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{x\to ۰}|f(x)-\frac{۱}{۲}|=۰$ و از آنجا $\lim_{x\to ۰}f(x)=\frac{۱}{۲}=f(۰)$، یعنی f در این نقطه نیز پیوسته است. (۸ نمره)

ب) (راه اول) با استفاده از تابع f در قسمت (الف)،

$$f(۰)=\frac{۱}{۲}<۱<f(۳)=\frac{e^۳-۴}{۹}$$

با توجه به پیوستگی f بر بازه $[۰,۳]$ و با استفاده از قضیه مقادیر میانی، $c\in(۰,۳)$ (و در نتیجه $c>۰$) وجود دارد که $f(c)=۱$ و از آنجا $\frac{e^c-۱-c}{c^۲}=۱$ و یا $e^c=۱+c+c^۲$.

(راه دوم) تابع g با ضابطه $g(x)=e^x-۱-x-x^۲$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. داریم

$$g(۱)=e-۳<۰ \quad \text{و} \quad g(۳)=e^۳-۱۳>۰$$

با توجه به پیوستگی g بر $[۱,۳]$ و اینکه $g(۱)g(۳)<۰$، بنابر قضیه بولتسانو، $c\in(۱,۳)$ وجود دارد که $g(c)=e^c-۱-c-c^۲=۰$. (۱۰ نمره)