

۱. انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع داده شده را بدست آورید و سپس در مورد همگرایی آن بحث کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

۲. انتگرال فوریه تابع داده شده را بدست آورید و در مورد همگرایی آن بحث کنید.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & |x - 1| < 1 \\ 0 & |x - 1| \geq 1 \end{cases}$$

۳. (الف) بسط فوریه کسینوسی  $f(x) = x(\pi - x)$  را در بازه  $[0, \pi]$  بدست آورید و در مورد همگرایی آن بحث کنید.

(ب) با استفاده از اتحاد پارسوال و قسمت (الف) نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

۴. تابع وزن، مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل داده شده را بیابید.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

۵. مسئله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x + t, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = t, \\ u(x, 0) = 1 + \cos(2\pi x). \end{cases}$$

۶. با استفاده از روش دالامبر، جواب عمومی معادله زیر را تعیین کنید:

$$u_{xx} = u_{tt} + 4, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

۷. معادله‌ی زیر را به یک معادله با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + h(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = p(t), \\ u_x(L, t) = q(t), \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

۸. مسئله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{x}{4}\right). \end{cases}$$

۹. تابع وزن مسئله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را تعیین کنید:

$$\begin{cases} x^3 y'' + 2x^2 y' + \lambda y = 0, & 1 < x < 2 \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$

۱۰. مسئله‌ی ناهمگن زیر را به یک مسئله‌ی همگن تبدیل کنید:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \sin(x), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 1, \\ u(1, t) = \frac{3}{4}, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

موفق باشید