بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

۹۸/۲/۵ | امتحان میان ترم | وقت : ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: | شماره دانشجویی: | نام مدرس:

۱. مسئله با مقادیر مرزی زیر را حل کنید (۳۰ نمره)

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_t - 4\cos x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, & t > 0, \\ u(\pi,t) = -1, & t > 0, \\ u(x,0) = \cos x + \sin 5x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

پاسخ: چون قسمت ناهمگن در معادله و هم در شرایط مرزی مستقل از t هستند، لذا قرار می‌دهیم $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ که در آن $w(x)$ یک جواب مستقل از زمان برای معادله است که در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کند. بنابراین،

$$4w''(x) = -4\cos x, w(0) = 1, w(\pi) = -1 \Longrightarrow w(x) = \cos x.$$

حال با انجام تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + \cos x$، مسئله ناهمگن داده شده به یک مسئله همگن به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} 4v_{xx} = v_t, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, & t > 0, \\ v(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \sin 5x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

با جایگذاری سری فوریه سینوسی تابع $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin nx$ در مسئله بالا،

$$4\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin nx\right)_{xx} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin nx\right)_t$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(-4n^2 v_n(t) - v_n'(t)\right)\sin nx = 0 \Longrightarrow -4n^2 v_n(t) - v_n'(t) = 0$$

$$\Longrightarrow v_n'(t) = -4n^2 v_n(t) \Longrightarrow v_n(t) = v_n(0)\exp(-4n^2 t).$$

$$\sin 5x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0)\sin nx \Longrightarrow v_5(0) = 1,\ v_n(0) = 0;\ n \neq 5.$$

$$\Longrightarrow v_5(t) = \exp(-100t),\ v_n(t) = 0;\ n \neq 5.$$

$$\Longrightarrow v(x,t) = v_5(t)\sin 5x = \exp(-100t)\sin 5x.$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = w(x) + v(x,t) = \cos x + \exp(-100t)\sin 5x.$$

۲. الف) با استفاده از روش دالامبر مسئله موج زیر را حل کنید (اثبات جزئیات لازم نیست)

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 \le x < \infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \ge 0, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \ge 0, \end{cases}$$

به طوری که،

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ب) با استفاده از قسمت الف، حاصل عبارت $E = u(1,2) + u(2,1)$ را بدست آورید.
پاسخ: با توجه به فرمول دالامبر داریم

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \Phi(x+t) + \Psi(x-t) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(z)dz, & x - t > 0 \\ \frac{1}{2}[f(x+t) - f(t-x)] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} g(z)dz, & x - t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}[e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)}] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^{-z}dz, & x > t \\ \frac{1}{2}[e^{-(x+t)} - e^{-(t-x)}] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} e^{-z}dz, & x < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}[e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)}] + \frac{1}{2}[e^{-(x-t)} - e^{-(x+t)}], & x > t \\ \frac{1}{2}[e^{-(t+x)} - e^{-(t-x)}] + \frac{1}{2}[e^{-(t-x)} - e^{-(t+x)}], & x < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{t-x}, & x > t \\ 0, & x < t \end{cases} \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$E = u(2,1) + u(1,2) = e^{1-2} + 0 = e^{-1}.$$

۳. مسئله لاپلاس زیر را حل کنید (۳۰ نمره)

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & 1 \le r \le e, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}, \\ u(1,\theta) = u(e,\theta) = 0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \\ u(r,0) = 0, & 1 < r < e, \\ u(r,\frac{\pi}{3}) = \sin(\pi \ln r), & 1 < r < e. \end{cases}$$