بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

۹۶/۱۰/۱۰ **امتحان پایان ترم** وقت : ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام مدرس:

---

۱. با استدلال کامل مقدار انتگرال ناسره زیر را بدست آورید

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{۲}+۱}dx.$$

۲. تصویر خط $y = ۲x$ را تحت نگاشت $w = \frac{i}{z}$ پیدا کنید.

۳. سری لوران تابع زیر را در ناحیه داده شده بدست آورید

$$f(z) = \frac{۱}{(z-i)(z-۳i)}, \quad \circ < |z-i| < ۲.$$

۴. با استدلال کامل مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\oint_{|z+i|=\frac{۱}{۲}} \frac{Log(i+\frac{۱}{z})}{z+i}dz.$$

۵. مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^{۲}(z^{۲}+۱)}dz,$$

که در آن C یک منحنی ساده و بسته در صفحه مختلط است که نقاط $\circ, i$ درون آن قرار دارند.

موفق باشید

پاسخ کامل سوالات:

$$
\begin{aligned}
(۱)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{۲}+۱}dx &= Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^{۲}+۱}dx\right)\\
&= Re\left(۲\pi i Res\left(\frac{e^{iz}}{z^{۲}+۱}, z=i\right)\right)\\
&= Re(۲\pi i\frac{e^{i^{۲}}}{۲i}) = Re(\pi e^{-۱}) = \frac{\pi}{e}.\\
|e^{iz}| &= e^{-y} < ۱,\ \ \forall\, y > ۰.\\
\left|\int_{C_{۲R}}\frac{e^{iz}}{z^{۲}+۱}dz\right| &\leq \int_{C_{۲R}}\frac{|e^{iz}|}{|z^{۲}+۱|}|dz|\\
&\leq \int_{C_{۲R}}\frac{|dz|}{|z|^{۲}-۱} = \frac{\pi R}{R^{۲}-۱} \to ۰\ \ as\ \ R\to\infty.\\
&\Longrightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_{۲R}}\frac{e^{iz}}{z^{۲}+۱}dz = ۰.
\end{aligned}
$$

$$
(۲)\ w=\frac{i}{z}\Longrightarrow z=\frac{i}{w}\Longrightarrow x+iy=\frac{i}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{v+iu}{u^{۲}+v^{۲}}
$$

$$
\Longrightarrow x=\frac{v}{u^{۲}+v^{۲}}, y=\frac{u}{u^{۲}+v^{۲}}; y=۲x\Longrightarrow u=۲v\Longrightarrow v=\frac{۱}{۲}u.
$$

$$
(۳)\ z-i=w\Longrightarrow ۰<|w|<۲,\ \ z=i+w
$$

$$
\Longrightarrow f(z)=\frac{۱}{(z-i)(z-۳i)}=\frac{۱}{w(w-۲i)}=\frac{۱}{-۲iw(۱-\frac{w}{۲i})}
$$

$$
=\frac{-۱}{۲iw}\times\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{w}{۲i}\right)^{n}=-\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{w^{n-۱}}{(۲i)^{n+۱}};\ \ \left|\frac{w}{۲i}\right|<۱\Longleftrightarrow |w|<۲.
$$

$$
\begin{aligned}
(۳)\ Re(i+\frac{۱}{z}) &= \frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}\leq ۰\Longrightarrow x\leq ۰,\\
Im(i+\frac{۱}{z}) &= ۱-\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}=۰\Longrightarrow y=x^{۲}+y^{۲}.\\
&\Longrightarrow x^{۲}+(y-\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴},\ \ x\leq ۰.
\end{aligned}
$$

حال با توجه به فرمول انتگرال کوشی می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\oint_{|z+i|=\frac{۱}{۲}} \frac{Log(i+\frac{۱}{z})}{z+i}dz &= ۲\pi i Log(i+\frac{۱}{-i}) = ۲\pi i Log(۲i)\\ &= ۲\pi i(\ln|۲i| + iArg(۲i)) = ۲\pi i(\ln ۲ + i\frac{\pi}{۲})\\ &= (-\pi^{۲}) + (۲\pi \ln ۲)i.\end{aligned}$$

(۴) با توجه به قضیه مانده ها می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{iz}}{z^{۲}(z^{۲}+۱)}dz &= ۲\pi i\left(\frac{e^{i^{۲}}}{i^{۲}(۲i)}+i\right) = ۲\pi i\left(\frac{e^{-۱}}{-۲i}+i\right)\\ &= ۲\pi(-\frac{۱}{۲}e^{-۱}-۱) = -\pi(۲+\frac{۱}{e}).\end{aligned}$$

$$Res(f, z=\circ) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{z^{۲}+۱}\right)\Big|_{z=\circ} = \frac{e^{iz}(i(z^{۲}+۱)-۲z)}{(z^{۲}+۱)^{۲}}\Big|_{z=\circ} = i.$$