به نام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان — دانشکده علوم ریاضی

۱۳۹۶/۳/۱۶ امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی وقت: ۱۱۰ دقیقه

---

۱) نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z) = Log\left(\frac{z}{1+iz}\right)$ را در صفحه‌ی اعداد مختلط مشخص کنید. (۳۰ نمره)

حل: نقاط غیر تحلیلی جایی است که $Re(\frac{z}{1+iz}) \leq 0$ و $Im(\frac{z}{1+iz}) = 0$. داریم که

$$w := \frac{z}{1+iz} \times \frac{1-i\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{z-i|z|^2}{|1+iz|^2} \Longrightarrow Re(w) = \frac{Re(z)}{|1+iz|^2} \leq 0 \Longrightarrow x = Re(z) \leq 0,$$

$$Im(w) = \frac{Im(z)-|z|^2}{|1+iz|^2} = 0 \Longrightarrow Im(z) = |z|^2 \Longrightarrow y = x^2+y^2 \Longrightarrow x^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

$\Longrightarrow$ مجموعه نقات غیر تحلیلی $= \{z = x+iy \mid x \leq 0, x^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\} =$ یک نیم دایره $\square$

---

۲) کلیه جوابهای معادله زیر را بیابید. (۳۰ نمره)

$$\sin(z) = -2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1396}$$

راه حل اول: ابتدا مشاهده کنید که

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1396} = (i)^{1396} = (i^2)^{698} = (-1)^{698} = 1.$$

بنابراین معادله‌ی $\sin(z) = -2$ را حل می‌کنیم. داریم که

$$-2+0i = -2 = \sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$\Longrightarrow \sin(x)\cosh(y) = -2 \ and\ \cos(x)\sinh(y) = 0 \Longrightarrow \cos(x) = 0 \text{ یا } \sinh(y) = 0$$

$$\Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ یا } y = 0.$$

$$y = 0 \Longrightarrow \sin(x)\cosh(0) = -2 \Longrightarrow \sin(x) = -2 \quad (which\ is\ not\ possible),$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin(k\pi+\frac{\pi}{2})\cosh(y) = -2 \Longrightarrow k\ is\ odd\ and\ \cosh(y) = 2 \Longrightarrow$$

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2} = 2 \Longrightarrow e^{2y} - 4e^y + 1 = 0 \Longrightarrow e^y = 2 \pm \sqrt{3} \Longrightarrow y = \ln(2 \pm \sqrt{3}).$$

$$\Longrightarrow z = x+iy = (2n-1)\pi + \frac{\pi}{2} + i\ln(2 \pm \sqrt{3});\ n \in \mathbb{Z}.$$

راه حل دوم: داریم که

$$\sin(z) = -2 \Longrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -2 \Longrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = -4i \Longrightarrow e^{2iz} - 1 = -4ie^{iz}$$

$$\Longrightarrow e^{2iz} + 4ie^{iz} - 1 = 0 \Longrightarrow e^{iz} = (-2 \pm \sqrt{3})i$$

$$\Longrightarrow iz = \log((-2 \pm \sqrt{3})i) = \ln(|(-2 \pm \sqrt{3})i|) + i\arg((-2 \pm \sqrt{3})i) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

$$\Longrightarrow z = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\ln(2 \pm \sqrt{3}) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\ln(2 \mp \sqrt{3}). \qquad \square$$

---

۳) سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ را در حوزه $1<|z|<2$ بدست آورید. (۳۰ نمره)

حل: چون $1<|z|<2$، پس $|\frac{z}{2}|<1$ و $|\frac{1}{z}|<1$. در نتیجه، بنابر سری هندسی داریم

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n \Longrightarrow \frac{2}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} \Longrightarrow \frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$
$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n \Longrightarrow \frac{z}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \Longrightarrow \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$
$$\Longrightarrow f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}. \quad \square$$

---

۴) اگر

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-z}}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

آنگاه با ذکر دلیل، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۳۰ نمره)

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^{f(z)}}{z^2}dz$$

حل: با توجه به اینکه $z=0$ یک نقطه تکین برداشتنی برای تابع $g(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$ است، تابع $f(z)$ تعریف شده در بالا یک تابع تام است (یعنی همه جا مشتقپذیر) که می‌توان آنرا به شکل زیر نوشت:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots \Longrightarrow e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots \Longrightarrow 1-e^{-z}=z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$
$$\Longrightarrow \frac{1-e^{-z}}{z}=1-\frac{1}{2}z+\frac{z^2}{6}+\ldots \Longrightarrow f(z)=1-\frac{1}{2}z+\frac{z^2}{6}+\ldots$$
$$\Longrightarrow f'(z)=-\frac{1}{2}+\frac{z}{3}+\ldots \Longrightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}.$$

حال با توجه به فرمول انتگرال کوشی داریم

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^{f(z)}}{z^2}dz=(2\pi i)\frac{d}{dz}e^{f(z)}|_{z=0}=(2\pi i)f'(0)e^{f(0)}=(2\pi i)(-\frac{1}{2})e^1=-\pi ie. \quad \square$$

موفق باشید