بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

۹۷/۱۰/۱۶ | **امتحان پایان ترم** | **وقت : ۱۲۰ دقیقه**

نام و نام خانوادگی: | شماره دانشجویی: | نام مدرس:

---

۱. تصویر خطوط $x = \pi/۴$ و $y = ۱$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ بیابید. (۲۰ نمره)

پاسخ:

$$w = \sin z \Longleftrightarrow u + iv = \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\Longleftrightarrow u = \sin(x)\cosh(y), v = \cos(x)\sinh(y).$$
$$x = \frac{\pi}{۴}, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow u = \sin(\frac{\pi}{۴})\cosh(y) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\cosh(y) \geq \frac{۱}{\sqrt{۲}},$$
$$v = \cos(\frac{\pi}{۴})\sinh(y) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sinh(y) \in \mathbb{R}.$$
$$\cosh^۲(y) - \sinh^۲(y) = ۱ \Longrightarrow ۲u^۲ - ۲v^۲ = ۱$$
$$\Longrightarrow u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}; u \geq \frac{۱}{\sqrt{۲}}, v \in \mathbb{R}.$$
$$y = ۱ \Longrightarrow u = \sin(x)\cosh(۱), v = \cos(x)\sinh(۱)$$
$$\Longrightarrow \frac{u^۲}{\cosh^۲(۱)} + \frac{v^۲}{\sinh^۲(۱)} = \sin^۲(x) + \cos^۲(x) = ۱.$$

۲. سری لوران $f(z) = \frac{۱}{z(z-۲i)}$ را در ناحیه‌ی $|z - ۲i| > ۲$ بیابید. (۲۰ نمره)

پاسخ:

$$z - ۲i = w \Longrightarrow z = ۲i + w;\ |w| > ۲.$$
$$\Longrightarrow f(z) = \frac{۱}{z(z-۲i)} = \frac{۱}{w(w+۲i)} = \frac{۱}{w^۲(۱ + \frac{۲i}{w})} = \frac{۱}{w^۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\left(\frac{۲i}{w}\right)^n$$
$$= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۲i)^n}{w^{n+۲}} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۲i)^n w^{-n-۲};\quad \left|\frac{۲i}{w}\right| < ۱ \Longleftrightarrow |w| > ۲.$$

۳. انتگرال زیر را با استدلال کامل محاسبه کنید (تابع لگاریتم با شاخه اصلی است) (۲۰ نمره)

$$\int_{|z-۴i|=۲} \frac{Ln(z + \frac{۱}{z})}{z - ۳i}dz$$

پاسخ: ابتدا نقاط غیر تحلیلی تابع لگاریتم را در صفحه مختلط مشخص می‌کنیم:

$$Re(z+\frac{1}{z}) = Re(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}) = x+\frac{x}{x^2+y^2} = x(1+\frac{1}{x^2+y^2}).$$
$$Re(z+\frac{1}{z}) \leq 0 \Longrightarrow x \leq 0.$$
$$Im(z+\frac{1}{z}) = Im(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}) = y-\frac{y}{x^2+y^2} = y(1-\frac{1}{x^2+y^2}).$$
$$Im(z+\frac{1}{z}) = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ یا } x^2+y^2 = 1.$$

با توجه به اینکه تابع لگاریتم درون و روی دایره $|z-4i| = 2$ تحلیلی است و نقطه $z_0 = 3i$ درون این دایره قرار دارد، با استفاده از فرمول انتگرال کوشی می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}
\int_{|z-4i|=2} \frac{Ln(z+\frac{1}{z})}{z-3i}dz &= (2\pi i)Ln(3i+\frac{1}{3i}) = (2\pi i)Ln(3i-\frac{i}{3}) \\
&= (2\pi i)Ln(\frac{8i}{3}) = 2\pi i\left(\ln|\frac{8i}{3}| + iArg(\frac{8i}{3})\right) \\
&= 2\pi i\left(\ln\frac{8}{3} + i\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\pi^2 + 2\pi i\ln\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

۴. فرض کنید

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\cosh(z)-1}{z^2} & z \neq 0 \\ \frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

انتگرال زیر را با استدلال کامل محاسبه کنید (۲۵ نمره)

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{(z^4+4)(e^z+4)}dz$$

پاسخ: برای $z \neq 0$ می‌توان نوشت

$$\cosh(z) = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots \Longrightarrow \frac{\cosh(z)-1}{z^2} = \frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$$
$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2}+\frac{z^2}{24}+\cdots, \quad f'(z) = 0+\frac{z}{12}+\cdots.$$

با توجه به اینکه تابع f و در نتیجه f' توابع تام هستند، ریشه‌های مخرج را می‌یابیم

$$z^۴+۴=۰ \Longrightarrow z^۴=-۴ \Longrightarrow r^۴e^{۴i\theta}=۴e^{i(\pi+۲k\pi)}$$
$$\Longrightarrow r=\sqrt[۴]{۴}=\sqrt{۲},\ \theta=\frac{\pi+۲k\pi}{۴} \Longrightarrow z=\pm۱\pm i \Longrightarrow |z|=\sqrt{۲}>۱.$$
$$e^z+۴=۰ \Longrightarrow e^z=-۴ \Longrightarrow z=Ln(-۴)=\ln(۴)+i(\pi+۲k\pi);\ k\in\mathbb{Z}.$$
$$\Longrightarrow |z|>\ln(۴)>\ln(e)=۱.$$

مشاهده می‌شود که هیچکدام از نقاط غیرتحلیلی تابع زیر انتگرال درون و روی منحنی بسته $|z|=۱$ قرار ندارند و در نتیجه، طبق قضیه کوشی-گورسا، مقدار انتگرال برابر با صفر است.

۵. مقدار انتگرال زیر را با استفاده از قضیه‌ی مانده‌ها و با استدلال کامل محاسبه کنید (۲۵ نمره)

$$\int_۰^{+\infty}\frac{x\sin(۲x)}{(x^۲+۴)^۲}dx$$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\int_۰^{+\infty}\frac{x\sin(۲x)}{(x^۲+۴)^۲}dx &= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(۲x)}{(x^۲+۴)^۲}dx\\
&= \frac{۱}{۲}Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{۲ix}}{(x^۲+۴)^۲}dx\right)\\
&= \frac{۱}{۲}Im\left(۲\pi i\ Res\left(\frac{ze^{۲iz}}{(z^۲+۴)^۲}, z=۲i\right)\right)\\
&= \frac{۱}{۲}Im\left(۲\pi i\frac{d}{dz}\frac{ze^{۲iz}}{(z+۲i)^۲}\Big|_{z=۲i}\right)\\
&= \frac{۱}{۲}Im\left(۲\pi i\frac{(۱+۲iz)(z+۲i)e^{۲iz}-۲ze^{۲iz}}{(z+۲i)^۳}\Big|_{z=۲i}\right)\\
&= \frac{۱}{۲}Im\left(۲\pi i\frac{(۱+۴i^۲)(۴i)e^{-۴}-۲(۲i)e^{-۴}}{(۴i)^۳}\right)\\
&= \frac{۱}{۲}Im\left(۲\pi i\frac{e^{-۴}}{۴}\right)\\
&= \frac{\pi}{۴}e^{-۴}.
\end{aligned}$$

برای تکمیل اثبات، با استفاده از قضیه فشردگی، نشان می‌دهیم که

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{2R}}\frac{ze^{2iz}}{(z^2+4)^2}dz=0 \qquad (C_{2R}: z=Re^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]).$$

داریم که

$$\begin{aligned}0\le\left|\int_{C_{2R}}\frac{ze^{2iz}}{(z^2+4)^2}dz\right| &\le \int_{C_{2R}}\frac{|z||e^{2iz}|}{|z^2+4|^2}|dz|\le\int_{C_{2R}}\frac{Re^{-2y}}{(|z|^2-4)^2}|dz|\\ &\le \int_{C_{2R}}\frac{R|dz|}{(R^2-4)^2}=\frac{\pi R^2}{(R^2-4)^2}\to 0,\ as\ R\to\infty.\end{aligned}$$