بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

۹۶/۰۸/۳۰ **امتحان میان ترم** وقت : ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام مدرس:

---

۱. فرم سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

که در آن

$$\begin{aligned}
a_۰ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi} ۱\,dx = \frac{۱}{۲}, \\
a_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{۱}{n\pi}\sin nx\Big|_{۰}^{\pi} = ۰, \\
b_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{-۱}{n\pi}\cos nx\Big|_{۰}^{\pi} \\
&= \frac{۱}{n\pi}(۱-(-۱)^n).
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n\pi}(۱-(-۱)^n)\sin nx = \begin{cases} ۰ & -\pi < x < ۰ \\ ۱ & ۰ < x < \pi \\ \frac{۱}{۲} & x = ۰ \end{cases}$$

(ب)

$$x = \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n\pi}(۱-(-۱)^n)\sin n\frac{\pi}{۲} = ۱$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n\pi}(۱-(-۱)^n)\sin n\frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{(۲n-۱)\pi}\sin(۲n-۱)\frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n-۱)} = -\frac{\pi}{۴}.$$

$$||f||^{۲} = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^{۲} dx = \int_{۰}^{\pi} dx = \pi, \quad ||f||^{۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} C_n^{۲} ||\phi_n||^{۲}$$
$$\Longrightarrow \pi = \frac{۱}{۴}||۱||^{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}\pi^{۲}} (۱ - (-۱)^n)^{۲} ||sinnx||^{۲}$$
$$\Longrightarrow \pi = \frac{\pi}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}\pi^{۲}} (۱ - (-۱)^n)^{۲} \pi$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}\pi^{۲}} (۱ - (-۱)^n)^{۲} = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴}{(۲n-۱)^{۲}\pi^{۲}} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۸}.$$

۲. (الف) ابتدا با ضرب آن در عامل انتگرال ساز:

$$\mu(x) = \frac{۱}{P(x)} e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx} = \frac{۱}{۱} e^{\int \frac{-۲}{۱} dx} = e^{-۲x}$$

داریم:

$$e^{-۲x}(y'' - ۲y' + \sigma y) = ۰ \Longrightarrow (y' e^{-۲x})' + \sigma e^{-۲x} y = ۰.$$

با مقایسه ی آن با فرم اشتورم لیوویل $(ry')' + (q + \sigma p)y = ۰$ که p تابع وزن است داریم

$$p(x) = e^{-۲x}.$$

(ب) ابتدا معادله شاخص را می نویسیم و سپس روی ریشه های آن بحث می کنیم:

$$y = e^{rx} \Longrightarrow r^{۲} - ۲r + \sigma = ۰ \Longrightarrow r_{۱,۲} = ۱ \pm \sqrt{۱ - \sigma}.$$
$$(i)\ \sigma = ۱ \Longrightarrow r_۱ = r_۲ = ۱ \Longrightarrow y(x) = (c_۱ + c_۲ x)e^x.$$
$$y(۰) = ۰ \Longrightarrow c_۱ = ۰, y(\pi) = ۰ \Longrightarrow c_۲ \pi e^{\pi} = ۰ \Longrightarrow c_۲ = ۰ \Longrightarrow y = ۰.$$
$$(ii)\ \sigma < ۱ \Longrightarrow ۱ - \sigma = k^{۲} > ۰ \Longrightarrow r_۱ = ۱ + k,\ r_۲ = ۱ - k. \Longrightarrow$$
$$y(x) = c_۱ e^{r_۱ x} + c_۲ e^{r_۲ x} = c_۱ e^{x+kx} + c_۲ e^{x-kx} = e^x (a \cosh kx + b \sinh kx).$$
$$y(۰) = ۰ \Longrightarrow a = ۰, y(\pi) = ۰ \Longrightarrow b e^{\pi} \sinh(k\pi) = ۰ \Longrightarrow b = ۰ \Longrightarrow y = ۰.$$
$$(iii)\ \sigma > ۱ \Longrightarrow ۱ - \sigma = -k^{۲} < ۰ \Longrightarrow r_{۱,۲} = ۱ \pm ik.$$
$$\Longrightarrow y(x) = e^x (a \cos kx + b \sin kx).$$
$$y(۰) = ۰ \Longrightarrow a = ۰, y(\pi) = ۰ \Longrightarrow b e^{\pi} \sin(k\pi) = ۰ \Longrightarrow \sin(k\pi) = ۰$$
$$\Longrightarrow k\pi = n\pi \Longrightarrow k = n \Longrightarrow \sigma_n = ۱ + n^{۲}, y_n(x) = b_n e^x \sin(nx).$$

۳. ابتدا تابع کمکی $W(x,t)=c_۱x+c_۲$ را به گونه ای می یابیم که صرفا در شرایط مرزی مساله صدق کند:

$$W(۰,t)=۱\Longrightarrow c_۲=۱,\ \ W(۱,t)=e^{-t}\Longrightarrow c_۱+c_۲=e^{-t}$$
$$\Longrightarrow c_۱=e^{-t}-۱\Longrightarrow W=(e^{-t}-۱)x+۱.$$

اکنون تغییر متغیر $u=V+W$ را در نظر می گیریم که نتیجه می دهد:

$$V_{xx}=V_t+\sin(\pi x),\ \ V(۰,t)=V(۱,t)=۰,\quad V(x,۰)=f(x)-۱.$$

حال برای معادله فوق یک جواب مستقل از زمان پیدا می کنیم. برای این منظور در معادلات بالا قرار می دهیم $V(x,t)=\Psi(x)$. بنابراین

$$\Psi''(x)=\sin(\pi x),\ \ \Psi(۰)=\Psi(۱)=۰\Longrightarrow\Psi(x)=-\frac{۱}{\pi^۲}\sin\pi x.$$

در نهایت تغییر متغیر

$$V=-\frac{۱}{\pi^۲}\sin\pi x+\tilde{V}$$

را در نظر می گیریم که منجر به مساله ی همگن زیر می شود:

$$\tilde{V}_{xx}=\tilde{V}_t,\ \ \tilde{V}(۰,t)=\tilde{V}(۱,t)=۰,\ \ \tilde{V}(x,۰)=f(x)-۱+\frac{۱}{\pi^۲}\sin\pi x.$$

۴. از روش جداسازی متغیرها بهره می بریم. یعنی قرار می دهیم
$$u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta).$$

از شرایط داده شده در مساله نتیجه می شود که

$$u(r,۰)=۰\Longrightarrow R(r)\Phi(۰)=۰\Longrightarrow\Phi(۰)=۰.$$
$$u(r,\pi)=۰\Longrightarrow R(r)\Phi(\pi)=۰\Longrightarrow\Phi(\pi)=۰.$$
$$r^۲u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=۰\Longrightarrow r^۲R''(r)\Phi(\theta)+rR'(r)\Phi(\theta)+R(r)\Phi''(\theta)=۰$$
$$(\times\frac{۱}{R(r)\Phi(\theta)})\Longrightarrow\frac{r^۲R''(r)}{R(r)}+\frac{rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=\sigma.$$

طرف چپ تساوی فقط تابعی از r و طرف راست فقط تابعی از θ است، چون

برابرند حاصل باید یک عدد ثابت باشد. در نتیجه

$$\begin{array}{ll}
& \{\Phi''(\theta)+\sigma\Phi(\theta)=\circ,\ \Phi(\circ)=\Phi(\pi)=\circ\}, \\
& \left\{r^{۲}R''(r)+rR'(r)-\sigma R(r)=\circ,\ \ R\ \ bounded\ \ for\ r\to\infty\right\}. \\
(i) & \sigma=\circ\Longrightarrow\Phi(\theta)=a\theta+b. \\
& \Phi(\circ)=b=\circ,\Phi(\pi)=a\pi=\circ\Longrightarrow a=\circ\Longrightarrow\Phi=\circ. \\
(ii) & \sigma=-\lambda^{۲}<\circ\Longrightarrow\Phi(\theta)=a\sinh(\lambda\theta)+b\cosh(\lambda\theta). \\
& \Phi(\circ)=b=\circ,\Phi(\pi)=a\sinh(\lambda\pi)=\circ\Longrightarrow a=\circ\Longrightarrow\Phi=\circ. \\
(iii) & \sigma=\lambda^{۲}>\circ\Longrightarrow\Phi(\theta)=a\sin(\lambda\theta)+b\cos(\lambda\theta). \\
& \Phi(\circ)=b=\circ,\Phi(\pi)=a\sin(\lambda\pi)=\circ\Longrightarrow\lambda\pi=n\pi\Longrightarrow\lambda=n. \\
\Longrightarrow & \sigma=n^{۲},\Phi_n(\theta)=a_n\sin(n\theta);n\in\mathbb{N}. \\
& r^{۲}R''(r)+rR'(r)-n^{۲}R(r)=\circ\Longrightarrow R_n(r)=c_{۱}r^{n}+c_{۲}r^{-n};n\in\mathbb{N}. \\
& R\ \ bounded\ \ for\ r\to\infty\Longrightarrow c_{۱}=\circ\Longrightarrow R_n(r)=c_{۲}r^{-n}. \\
\Longrightarrow & u(r,\theta)=\sum_{n=۱}^{\infty}(c_{۲}a_n)r^{-n}\sin(n\theta)=\sum_{n=۱}^{\infty}A_nr^{-n}\sin(n\theta). \\
& u(۱,\theta)=(۱+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta, \\
\Longrightarrow & \sum_{n=۱}^{\infty}A_n\sin(n\theta)=\sin\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta \\
\Longrightarrow & A_{۱}=۱,\ A_{۲}=\frac{۱}{۲},\ A_{۳}=A_{۴}=\cdots=\circ. \\
\Longrightarrow & u(r,\theta)=r^{-۱}\sin\theta+\frac{۱}{۲}r^{-۲}\sin ۲\theta. \qquad\qquad \square
\end{array}$$