

۱. برای ماتریس A داده شده ماتریس متعامد P را طوری بیابید که $P^T A P$ قطری باشد:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(iv) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

۲. برای ماتریس A داده شده ماتریس وارون پذیر P را بیابید که $P^{-1} A P$ قطری باشد:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(iii) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(iv) A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(v) A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -4 & -7 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 2 & -11 & 6 & 11 \\ -4 & 4 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

۳. وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iv) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۴. ماتریس همسازه و الحاقی ماتریس داده شده A را بیابید و به کمک آن $\det A$ و A^{-1} را محاسبه کنید:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (ii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

۵. نشان دهید که مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های حقیقی پادمتقارن و پادهرمیتی، موهومی محض هستند.

۶. نشان دهید هر ماتریس مختلط C را می‌توان به صورت یکتای $C = A + iB$ نوشت که در آن A و B ماتریس‌های حقیقی هستند. و نتیجه بگیرید C هرمیتی است اگر و تنها اگر A ماتریس متقارن و B ماتریس پادمتقارن باشد.

۷. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}.$$

مطلوبست محاسبه‌ی

$$A \oplus B, B \oplus A, A \oplus C, C \oplus B, A \otimes B, B \otimes C, C \otimes A, (A \otimes A) \oplus (B \otimes B).$$

موفق باشید