بسمه تعالی

تمرینات درس دستگاه‌های دینامیکی ۱ سری دوم

---

۱. با یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس A و تعیین زیرفضاهای خطی پایدار و ناپایدار، نمای فاز دستگاه معادلات زیر را در فضای فاز آن رسم کنید:

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_3.$$

۲. فرض کنید ماتریس مربعی A دارای یک مقدار ویژه منفی باشد. آنگاه نشان دهید که دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ دارای حداقل یک جواب غیر بدیهی $x(t)$ است به طوری که $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

۳. نمای فاز دستگاه‌های خطی زیر را رسم کنید:

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (d) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

۴. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را بیابید و نشان دهید که ماتریس وارون پذیر P وجود دارد به طوری که $B = P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری است. دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ و سپس $\dot{y} = By$ را با استفاده از نتیجه فوق حل کنید. و سپس نماهای فاز را هم در صفحه‌ی x و هم در صفحه‌ی y رسم کنید.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

۵. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را به شکل دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ بنویسید و سپس آنرا حل کنید:

$$(a) \quad \ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0 \qquad (b) \quad \dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$$

۶. ماتریس‌های $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را پیدا کنید به طوری که $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

۷. ماتریس e^A را محاسبه کنید، هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

۸. اگر $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ با خاصیت $\| T-I \| < ۱$ باشد، نشان دهید T وارون پذیر است و سری $\sum_{k=۰}^{\infty}(I-T)^k$ به $T^{-۱}$ همگرا است.

۹. فرض کنید $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ باشد. نشان دهید که

$$||T|| = \max_{|x|=۱} |T(x)| = \sup_{x\neq ۰} \frac{|T(x)|}{|x|}.$$

۱۰. نرم عملگر خطی $T:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $T(x,y)=(x+۲y,۳y)$ را محاسبه کنید.

۱۱. نشان دهید که اگر $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی وارون پذیر باشد، آنگاه $||T||>۰$ و

$$||T^{-۱}|| \geq \frac{۱}{||T||}.$$

۱۲. نشان دهید که اگر v یک بردار ویژه از عملگر خطی $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه v یک بردار ویژه از e^T است.

موفق باشید