بسمه تعالی

تمرینات درس ریاضیات تکمیلی سری سوم

---

۱. انتگرال زیر را محاسبه کنید، که در آن منحنی C نیم دایره‌ی $z = 2e^{i\theta}$، $0 \leq \theta \leq \pi$ است:

$$\int_C \frac{Log(iz) + Log(i\bar{z}) + z + 2}{z} dz.$$

۲. فرض کنید $f(iz) = |z| - z$. مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C f(\bar{z}) dz$، که در آن C نیم دایره‌ی $z = e^{i\theta}$، $0 \leq \theta \leq \pi$ است.

۳. حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید:

$$1)\ \int_{|z|=1} \frac{1}{z^4 \cos z} dz, \qquad 2)\ \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2(z-1)} dz,$$

$$3)\ \int_{|z-3|=\frac{3}{2}} \frac{Log(z)}{(z-1)^2(z^2-4)} dz, \qquad 4)\ \int_{|z-4|=2} \frac{Log(z-1)}{z-5} dz,$$

$$5)\ \int_{|z|=2} \frac{Log(z)}{(z-1)^2(z^2-4)} dz, \qquad 6)\ \int_{|z|=\frac{5}{2}} e^{z^2} \cot(\pi z) dz.$$

۴. اگر $0 < \varphi < \pi$، نشان دهید

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z^9}{1 - 2z\cos\varphi + z^2} dz = \frac{\sin 9\varphi}{\sin\varphi}.$$

۵. فرض کنید $f(z)$ یک تابع تام باشد و به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leq A|z|$، که در آن A یک عدد حقیقی مثبت است. نشان دهید اسکالر $a \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $f(z) = az$.

۶. با استفاده از سری هندسی، سری مک‌لوران (بسط تیلور حول صفر) تابع $f(z) = Log(1+z)$ را بیابید.

۷. سری تیلور تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ را حول نقاط $z_0 = -1, -i$ بدست آورید و شعاع همگرایی آن را مشخص کنید.

۸. سری لوران تابع $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$ را در نواحی داده شده بیابید:

$$(i)\ \ |z| > 2 \qquad (ii)\ \ 1 < |z| < 2 \qquad (iii)\ \ 0 < |z-1| < 1.$$

۹. نقاط تکین و مانده‌ی آنها را برای هر یک از توابع زیر مشخص کنید:

$$۱)\ \frac{۱-e^{۲z}}{z^{۴}} \qquad ۲)\ \frac{e^{۲z}}{(z-۱)^{۲}} \qquad ۳)\ \frac{z^{۳}}{\sin z^{۲}} \qquad ۴)\ e^{\frac{۱-z}{z}}(e^{z}-۱)$$

$$۵)\ \frac{۱}{z^{۲}(e^{z}-۱)} \qquad ۶)\ \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^{۲}}$$

۱۰. با استفاده از قضیه مانده‌ها، مقدار انتگرال‌های زیر را به دست آورید:

$$۱)\ \int_{|z|=۴}\frac{dz}{z^{۳}\sinh z} \qquad ۲)\ \int_{|z|=۱}\frac{e^{z}}{\sinh z}dz \qquad ۳)\ \int_{|z|=۲}\frac{۱}{z-۱}\cos(\frac{۱}{z})dz$$

$$۴)\ \int_{|z|=۲}\cos(\frac{z}{z-۱})dz \qquad ۵)\ \int_{|z|=۲} z\, e^{\frac{z}{(z+i)^{۲}}}dz \qquad ۶)\ \int_{|z|=۱}\frac{\sin z}{۱-\cos z}dz$$

$$۷)\ \int_{|z|=۱}\frac{۳z^{۲}-۲z+۵}{(۲z-۱)^{۲}(۳z-۱)}dz$$

موفق باشید