

۱. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل داده شده را بیابید:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & -L < x < L \\ y(L) = y(-L), \\ y'(-L) = y'(L). \end{cases}$$

۲. مسئله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r > 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \\ u(1, \theta) = \theta(2\pi - \theta). \end{cases}$$

۳. مسئله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 1 < r < e, \quad 0 < \theta < \frac{1}{4} \\ u(1, \theta) = 0 \\ u(e, \theta) = 0 \\ u(r, 0) = 0 \\ u(r, \frac{1}{4}) = \sqrt{r} \sin(\pi \ln r). \end{cases}$$

۴. با استفاده از روش جداسازی متغیرها، مساله‌ی لاپلاس زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, \quad 0 < y < \infty, \\ u(x, 0) = x(2 - x)e^x, & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, y) = u(2, y) = 0, & y \geq 0. \end{cases}$$

۵. مسئله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = xy, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(x, \pi) = 1 \\ u(x, 0) = x \\ u(\pi, y) = y \end{cases}$$